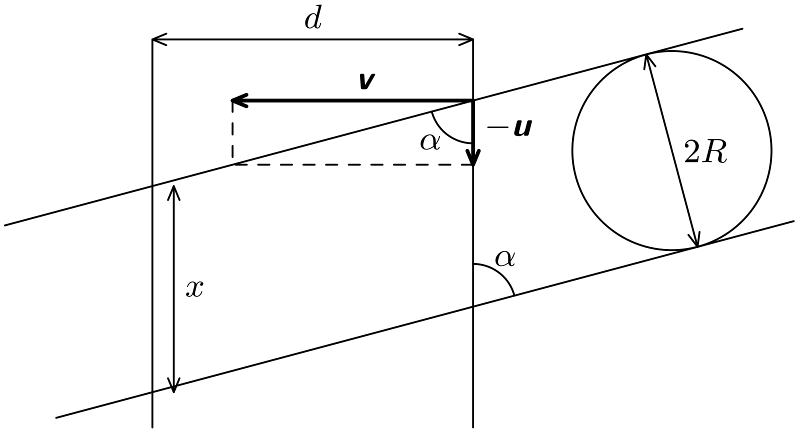
1. *mouchy*

Koule o poloměru R pohybující se velkou rychlostí $\boldsymbol{v}$ prolétne rojem much, který se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{u}$ kolmou na směr pohybu koule. Šířka roje je d, v jednotce objemu se nachází průměrně n much. Kolik much přijde při této smutné události o život?

Předpokládejme, že roj vyplňuje nekonečnou vrstvu ohraničenou dvěma rovinami (viz obr. 1). Řešení úlohy se usnadní, pokud budeme pozorovat děj z referenční soustavy spojené s rojem. Soustavu zvolíme tak, že vodorovná složka rychlosti koule je $\boldsymbol{v}$ a svislá $\boldsymbol{u}$. Z obrázku je zřejmé, že platí $\operatorname{tg} \alpha = v/u$. Abychom zjistili počet zabitých much, musíme určit objem tělesa vyznačeného na obrázku. Jeho objem určíme jako součin plochy podstavy S a jeho výšky d. Podstava má tvar elipsy o poloosách $x/2$ a R. Plocha podstavy má velikost



Obr. 1. Průlet koule rojem much

$$S = \pi \frac{r^2}{\sin \alpha} = \pi R^2 \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{v}.$$

Počet zabitých much je

$$P = nd\pi R^2 \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{v}.$$

2. *přemisťování kostky*

Máme homogenní kostku o hraně a a hmotnosti M. Při jakém koeficientu tření je energeticky výhodnější ji při jejím přesouvání převracet podél hrany než posunovat?

Při převalení kostky vykonáme práci, která je rovna navýšení potenciální energie, když je kostka na hraně. Hmotnost kostky označíme M, součinitel smykového tření f a tíhové zrychlení g. Změna těžiště kostky Δh je dána vztahem

$$\Delta h = a(\sqrt{2} - 1)/2\,.$$

Práce, kterou budeme muset vykonat při jednom převalení kostky, bude

$$W_1 = Mg\Delta h = Mga \frac{\left(\sqrt{2} - 1\right)}{2}\,.$$

Nyní vypočítáme práci vykonanou při posouvání kostky o stejnou vzdálenost, tedy o $s = a$. Třecí síla je dána vztahem $F_\mathrm{t} = Mgf$. Práce je pak dána jako

$$W_2 = F_\mathrm{t} s = Mgfa\,.$$

Obě práce dáme do rovnosti a určíme minimální koficient tření f, při kterém je už výhodnější kostku převracet.

$$Mga \frac{\sqrt{2} - 1}{2} = Mgfa \quad \Rightarrow \quad f = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}\,.$$

3. *tělesa na kladce*

Na pevné kladce jsou zavěšena dvě tělesa o hmotnostech $m_1 = 2$ kg a $m_2 = 1$ kg. Těleso o menší hmotnosti se nachází ve vzdálenosti $h = 4$ m pod tělesem o větší hmotnosti. Za jakou dobu budou obě tělesa ve stejné výšce, jestliže jsou počáteční rychlosti obou těles nulové? Hmotnost kladky neuvažujeme.

Na obě tělesa působí tíhová síla o velikosti $m_{1,2}g$ a tahová síla vlákna o velikosti F. U lehčího tělesa tahová síla převažuje, proto se pohybuje nahoru se zrychlením a. Protože se vlákno, kterým jsou obě tělesa spojena, neprodlužuje ani nezkracuje, pohybuje se těžší těleso dolů se zrychlením stejné velikosti, pouze opačného směru. Newtonovy pohybové rovnice pro tuto soustavu tedy jsou

$$m_2 g - F = m_2 a\,, \qquad -m_1 g + F = m_1 a\,.$$

Po sečtení obou rovnic a následném vydělení součtem hmostností získáme velikost zrychlení

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, g\,.$$

Protože se obě tělesa pohybují rovnoměrně zrychleným pohybem se stejným zrychlením, urazí každé z nich dráhu $h/2$. Ze známého vztahu pro rovnoměrně zrychlený pohyb $1/2h = 1/2at^2$ dostáváme pro hledanou dobu

$$t = \sqrt{\frac{h(m_1 + m_2)}{g(m_1 - m_2)}}\,,$$

pro zadané hodnoty vychází přibližně $t = 1{,}1$ s.

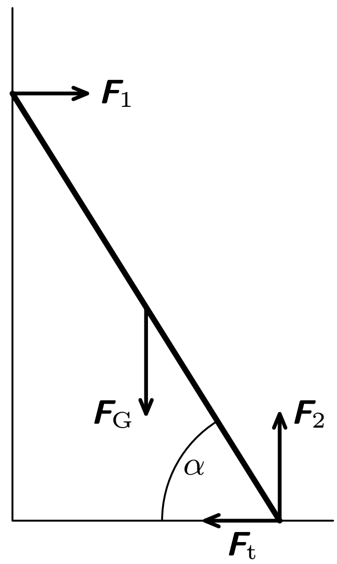
4. *žebřík*

O dokonale hladkou stěnu jsme opřeli žebřík, jehož těžiště je v jeho středu. Dolní konec žebříku se opírá o podložku se součinitelem tření $f = 0{,}3$. Jaký minimální úhel musí žebřík svírat s podložkou, aby nesklouzl?

Na žebřík působí reakce stěny $\boldsymbol{F}_1$ ve směru vodorovném, reakce podložky $\boldsymbol{F}_2$ ve směru svislém, třecí síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$ a konečně tíhová síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{G}$ (viz obr. 2). Hledáme mezní podmínku rovnováhy, tedy situaci, kdy je ještě výslednice všech sil působících na žebřík nulová a jejich výsledný moment taktéž nulový.

Z rovnosti sil máme

$$F_\mathrm{G} = F_2 \quad \Rightarrow \quad mg = F_2\,,$$
$$F_1 = F_\mathrm{t} \quad \Rightarrow \quad F_1 = fF_2\,.$$



Obr. 2. Žebřík

Je výhodné uvažovat moment sil vzhledem k bodu dotyku žebříku a podložky. Potom

$$2F_1 \sin\alpha = F_\mathrm{G}\cos\alpha = mg\cos\alpha\,,$$

Po dosazení z předcházejících dvou rovnic dostáváme

$$2f\sin\alpha F_2 = F_2\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2f} \approx 59^\circ 02'\,.$$

Úhel α tedy nemůže být menší než $59^\circ 02'$.

5. *závažíčko na kouli*

Na vrcholu koule poloměru R leží závažíčko, které se v čase nula začne pohybovat. Určete rozdíl svislých souřadnic vrcholu koule a bodu, kde se závažíčko odlepí

Během pohybu na závažíčko působí tíhová síla, která se rozloží do tečného a normálového směru, tření neuvažujeme. Pro dostředivou sílu platí $F_d = F_g \cos\varphi$, kde se $\cos\varphi$ dá vyjádřit jako $(R-y)/R$ (y je svislá vzdálenost od počátku pohybu, tj. nejvyššího bodu koule). Závaží se od koule odlepí v okamžiku, kdy se dostředivá síla vyrovná se silou odstředivou, která závisí na rychlosti závaží. Tu vypočítáme ze zákona zachování mechanické energie ($\Delta E_k = \Delta E_p$).

$$F_\mathrm{o} = F_\mathrm{d} \quad\Rightarrow\quad \frac{2mgy}{2} = mg\cdot\frac{R-y}{R} \quad\Rightarrow\quad y = \frac{1}{3}R\,.$$

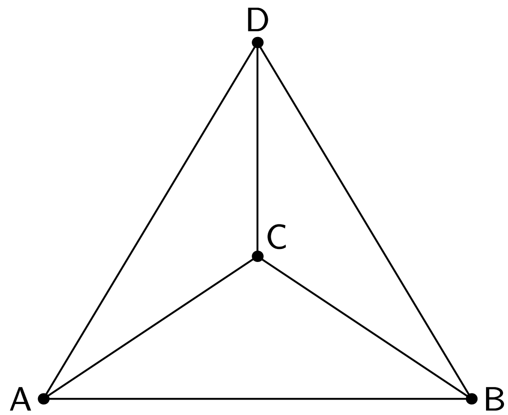
Závaží se tedy od povrchu koule oddělí, když bude ve svislé vzdálenosti $R/3$ od nejvyššího bodu koule (nebo také $90^\circ - \varphi \approx 42^\circ$).

6. *odpor čtyřstěnu*

Určete odpor mezi dvěma vrcholy čtyřstěnu složeného z drátů o odporu R = 100 Ω.

Při pohledu shora vypadá čtyřstěn podobně jako na obr.3. Připojení přívodních vodičů je libovolné, neboť každá dvojice vrcholů si je ekvivalentní. Nechť tedy připojíme napětí na vrcholy A a B. Je zřejmé, že ve vrcholech C a D bude stejný potenciál, proto ani jejich spojnicí neteče žádný proud. Situaci tedy můžeme zjednodušit odmazáním hrany CD. Tím se úloha značně zjednoduší, neboť máme obvod se třemi větvemi, z nichž dvě mají odpor $2R$ a zbylá R. Podle pravidel o sčítání odporů dostáváme

$$R_\text{čtyřstěn} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R}\right)^{-1} = \frac{R}{2} = 50\,\Omega\,.$$



Obr. 3

7. *rozsah ampérmetru*

Náš měřicí přístroj je sice dokonale lineární, ale není bohužel zkalibrovaný. Kalibrační technik změřil, že při plné výchylce jím prochází proud 2 mA při napětí na jeho svorkách 100 mV. Jak velký musíme paralelně připojit odpor, abychom získali ampérmetr s rozsahem do 10 mA?

Odpor přístroje je dle Ohmova zákonu $R_\mathrm{A} = U/I = 50\,\Omega$. Proud protékající ampérmetrem označíme I_A, odpor bočníku R_B a proud protékající bočníkem I_B. Při maximálním proudu obvodem bude dle Kirchhoffových zákonů platit

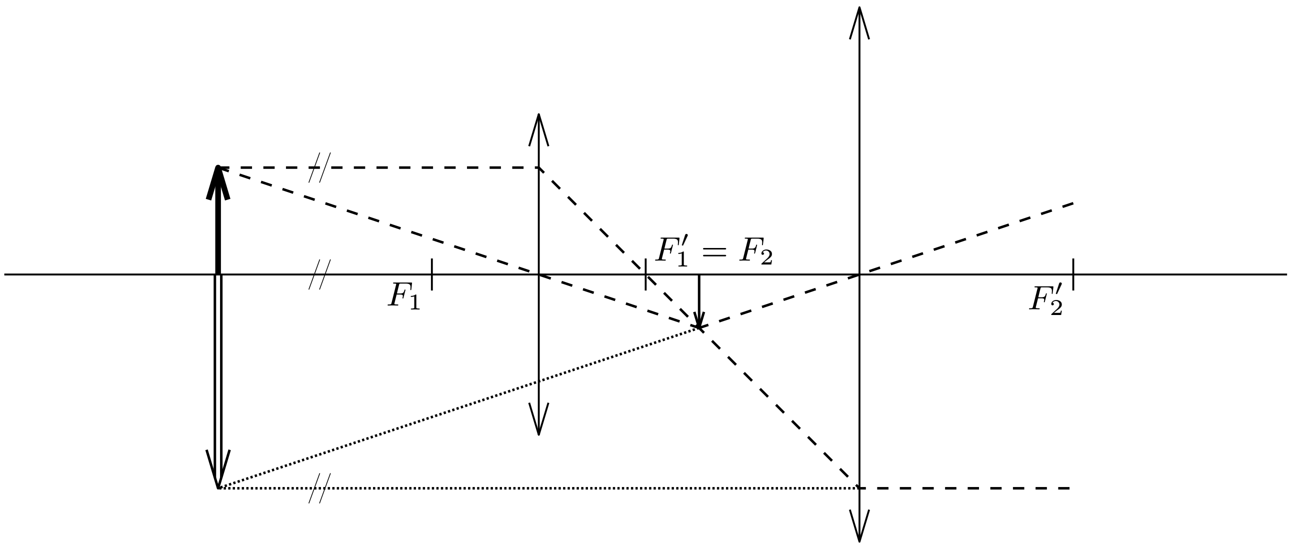
$$I_\mathrm{A} + I_\mathrm{B} = I_\mathrm{max} = 10\,\mathrm{mA} \quad\Rightarrow\quad I_\mathrm{B} = 8\,\mathrm{mA}\,.$$

Dále dle Kirchhoffových zákonů platí

$$-R_\mathrm{A}I_\mathrm{A} + R_\mathrm{B}I_\mathrm{B} = 0 \quad\Rightarrow\quad R_\mathrm{B} = \frac{I_\mathrm{A}}{I_\mathrm{B}}R_\mathrm{A} = \frac{I_\mathrm{A}}{I_\mathrm{max} - I_\mathrm{A}}R_\mathrm{A} = 12{,}5\,\Omega\,.$$

8. *čočky*

Dvě spojky s ohniskovými vzdálenostmi $f_1 = 10$ cm a $f_2 = 20$ cm zobrazují předmět do obrazu, jehož velikost je nezávislá na poloze předmětu. Najděte vzdálenost čoček.



Obr. 4. Schéma zobrazení čočkami

Vyjdeme z obr. 4. Víme, že paprsek procházející předmětovým ohniskem se v čočce láme tak, že vychází jako rovnoběžný s optickou osou. Symetricky naopak paprsek vstupující jako rovnoběžný s optickou osou prochází obrazovým ohniskem. Z těchto dvou pozorování snadno usoudíme, že bude-li vzdálenost čoček $f_1 + f_2 = 30$ cm, pak se paprsek rovnoběžný s optickou osou vstupující na první čočku láme do jejího obrazového ohniska, jež je zároveň i předmětovým ohniskem čočky druhé; ta jej tedy znovu láme a paprsek vychází ze soustavy opět rovnoběžně s optickou osou. Je zřejmé, že poloha předmětu nemá na velikost obrazu vliv.

9. *kondenzátor*

Kondenzátor z dvou desek plochy S vzdálených l_1 nabijeme baterií o napětí U_B. Jakou práci musíme vykonat k oddálení desek na vzdálenost l_2, když jsme předtím baterii neodpojili. Rozměry desek jsou mnohem větší než vzdálenosti l_1 a l_2.

Hledanou práci lze vyjádřit jako rozdíl energie soustavy (tj. kondenzátoru a baterie) v konečném a počátečním stavu. Energie E_1 v počátečním stavu bude

$$E_1 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_1} = \frac{1}{2}\frac{l_1}{\varepsilon S}\left(U \cdot \frac{\varepsilon S}{l_1}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon S}{l_1} \cdot U^2 .$$

Energie po oddálení desek bude (napětí zůstává stejné, protože baterii neodpojíme).

$$E_2' = \frac{1}{2} C_2 U^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon S}{l_2} \cdot U^2 .$$

Při tomto ději se ale zmenší náboj na kondenzátoru o

$$\Delta Q = U\varepsilon S \left(\frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2}\right) .$$

Tento náboj je potřeba přenést zpět na zdroj (tj. zdroj se nabíjí). Práce k tomu potřebná je $W_Q = \Delta Q \cdot U$. Celková práce nutná k oddálení desek kondenzátoru bude

$$W = E_2' - E_1 + W_Q = \frac{1}{2}\varepsilon S U^2 \cdot \frac{l_2 - l_1}{l_1 l_2}.$$

10. *smyčka jako proměnný odpor*

Z homogenního drátu o odporu $R = 10\,\Omega$ vytvoříme uzavřenou smyčku tvaru kružnice. Do jakých míst (v jakém poměru budou délky výsledných oblouků) musíme připojit přívodní vodiče, aby odpor mezi přívody byl $R_C = 9\,\Omega$?

Vytváříme vlastně dva paralelně zapojené odpory, přičemž odpor každého z nich je přímo úměrný délce daného oblouku. Z povahy úlohy je zřejmé, že platí

$$R_1 + R_2 = R\,,$$

kde R_1 a R_2 jsou odpory jednotlivých oblouků. Výsledný odpor R_C dvou paralelně zapojených odporů je

$$R_\mathrm{C} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_1(R - R_1)}{R} \quad \Rightarrow \quad R_1^2 - R_1 R + R_\mathrm{C} R = 0\,.$$

Máme tedy kvadratickou rovnici pro R_1, jejíž kořeny jsou $9\,\Omega$ a $1\,\Omega$, vzhledem k symetrii úlohy jsou dva kořeny v pořádku a je zřejmé, že máme odpor R, resp. délku smyčky, rozdělit v poměru 9 : 1.

11. *hustoměr*

Pavlův nový hustoměr má tvarválečku o průměru $d = 1$ cm a váží $m = 100$ g. Je ponořen v kapalině hustoty $\varrho = 1000\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ ve vertikální poloze. Volně plove ponořen do hloubky $x_0 = 5$ cm. Poté mu udělíme malý vertikální impuls, který vyvolá harmonické kmity ve vertikálním směru. Jaká bude perioda těchto kmitů? Tíhové zrychlení uvažujte $10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Pakliže vychýlíme hustoměr z rovnovážné polohy ve vertikálním směru o x, pak vlastně změníme ponořený objem o $\Delta V = \pi d^2 x/4$, a tedy vyvoláme silové působení vzniklé nerovnováhou gravitační a vztlakové síly, její svislá souřadnice bude

$$F = -\varrho g \frac{\pi}{4} d^2 x = -kx\,, \quad \text{kde } k = \varrho g \frac{\pi}{4} d^2\,,$$

tedy máme harmonický oscilátor odpovídající tuhosti pružiny k a tedy perioda takového pohybu je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{4}{d}\sqrt{\frac{\pi m}{g\varrho}} \doteq 2{,}3\,\mathrm{s}\,.$$

12. *vodní planeta*

Při zkoumání nově objevené planety, mající tvar koule o poloměru $R = 6400$ km, pokryté na celém svém povrchu oceánem hloubky $H = 10$ km z obyčejné vody, vědci zjistili, že zrychlení volně padajícího tělesa zůstává s velkou přesností nezměněným při ponoření do oceánu do různých hloubek. Určete na základě těchto údajů zrychlení volně padajícího tělesa při povrchu planety (odporové a vztlakové síly neuvažujte).

Povrchem planety rozumíme hladinu oceánu. Označme M hmotnost planety, M_x hmotnost vodní slupky o tloušťce x měřeno od povrchu planety a ϱ_v hustotu vody. Velikost tíhového zrychlení na povrchu

$$g_0 = \varkappa \frac{M}{(R-x)^2} \,.$$

Tíhové zrychlení v hloubce x pod povrchem planety je dáno vztahem

$$g_\mathrm{x} = \varkappa \frac{M - M_x}{(R-x)^2} \,.$$

Pro x v intervalu $[0{,}10]$ km platí podle zadání $g_0 = g_\mathrm{x}$ a hmotnost vodní slupky je $M_x = 4/3\pi\varrho_\mathrm{v}(R^3 - (R-x)^3)$. Řešením této soustavy rovnic dostaneme

$$g_x = \frac{4}{3}\varkappa\pi\varrho_v \frac{3R^2 - 3Rx + x^2}{2R - x} \,.$$

Protože $x \ll R$, platí přibližně

$$\frac{3R^2 - 3Rx + x^2}{2R - x} = \frac{3R}{2} .$$

Takže $g_x = 2\varkappa\pi\varrho_\mathrm{v}R$. Po číselném vyjádření $g_x = 2{,}68\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

13. *dvě kapičky*

Na dvou stejných kulových vodních kapkách je po jednom přebytečném elektronu, přičemž síla elektrického odpuzování kapek je stejně velká jako přitažlivá gravitační síla mezi kapkami. Určete poloměr kapek. Hustota vody je 1000 kg·m^{-3}*, gravitační konstanta* $\varkappa = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}}$*, náboj elektronu je* $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *C, permitivita vakua* $\varepsilon_0 = 8{,}8 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F{\cdot}m^{-1}}$*.*

Vyjádříme si rovnost velikosti elektrostatické a gravitační síly

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{R^2} = \varkappa\frac{m^2}{R^2} \,,$$

kde R je vzájemná vzdálenost kapiček. Vyjádříme si hmotnost kapky pomocí jejího poloměru

$$m = \frac{4}{3}\varrho\pi r^3 \,,$$

dosadíme do prvního vztahu

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{16}{9}\varkappa\pi^2\varrho^2 r^6 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[6]{\frac{9e^2}{64\pi^3\varepsilon_0\varkappa\varrho^2}} \,,$$

tedy po dosazení

$$r \approx 7{,}6 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m} \,.$$

14. *loďka*

Pod jakým úhlem vzhledem k břehu má vyplout loďka rychlostí v, aby na protější břeh řeky tekoucí rychlostí u v celé šíři doplula v co nejkratší době?

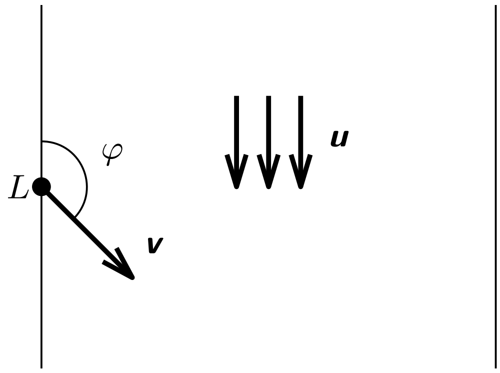
Zajímá nás pouze složka rychlosti loďky kolmá ke břehům. Ta však závisí pouze na její vlastní rychlosti v, neboť proud řeky je rovnoběžný s břehy. Tedy pro nás je zajímává rychlost

$$v_x = v\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) ,$$

která je nejvyšší, pokud argument kosinu je roven nule, neboli

$$\varphi = \frac{\pi}{2} .$$

Vidíme, že loďka musí od břehu odrazit pod pravým úhlem.



Obr. 5

15. *práce z tepla*

Mějme dvě stejná tělesa o různých teplotách $T_{10} = 50°C$ a $T_{20} = 20°C$. Tento rozdíl využijeme ke konání práce, čímž dosáhneme vyrovnání teplot obou těles. Předpokládejte, že práci čerpáme z těles s maximální účinností. Jaká bude výsledná teplota T těles?

Pokud práci čerpáme maximálně účinně, každý cyklus našeho stroje bude mít účinnost podle Carnota

$$\eta = \frac{T_2 - T_1}{T_2}$$

Nechť při jednom cyklu je tělesu 2 odebráno teplo dQ, které se využije jednak na konání práce, jednak na ohřátí chladnějšího tělesa. Označme kapacitu tělesa C; pak platí

$$\mathrm{d}Q = -C\,\mathrm{d}T_2 = C\,\mathrm{d}T_1 + \mathrm{d}W ,$$

proces má ale maximální účinnost, takže platí $\mathrm{d}W = \eta\,\mathrm{d}Q$ a po dosazení

$$-\,\mathrm{d}T_2 = \mathrm{d}T_1 - \eta\,\mathrm{d}T_2$$

a konečne po dosazení η

$$\frac{\mathrm{d}T_1}{T_1} = -\frac{\mathrm{d}T_2}{T_2} .$$

Řešení této rovnice je $\ln T_2/T_{20} = -\ln T_1/T_{10}$ neboli

$$T_1 T_2 = T_{10} T_{20}$$

Protože teploty obou těles na konci se rovnají $T_1 = T_2$, platí

$$T = \sqrt{T_{10} T_{20}}$$

Číselně vychází $T \doteq 34{,}6\,°\mathrm{C}$.

16. *hodinky*

Kolikrát za den svírají malá a velká ručička hodinek úhel $20°12'$? Podívejte se na své hodinky. V kolik hodin nejdříve zmíněná situace nastane? Počítejte s přesností na sekundy.

Nejprve snadnou úvahou zjistíme, kolikrát za den mine malá ručička velkou ručičku. Malá ručička oběhne za den dvakrát dokola, zatímco velká $24\times$. Z toho tedy vyplývá, že malá a velká ručička se „potkají“ $22\times$ za den, a tedy svírají libovolný úhel různý od přímého $44\times$ za jeden den.

Nyní vypočítejme, v kolik hodin bude úhel mezi ručičkami roven $20°12'$. Obě ručičky konají rovnoměrný pohyb po kružnici. Označme φ, resp. Φ úhel, který svírá malá ručička, resp. velká ručička s dvanáctkou. Pak pro rovnoměrný pohyb platí

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t,$$
$$\Phi = \Phi_0 + \Omega t,$$

kde φ_0, resp. Φ_0 je počáteční úhel vychýlení malé ručičky, resp. velké ručičky a t udává čas v hodinách. Úhlová rychlost malé ručičky je $\omega = 30°/\text{hod.}$ a velké $\Omega = 360°/\text{hod.}$ V 10:00 navíc platí, že $\varphi_0 = -60°$ a $\Phi_0 = 0°$. Podle zadání požadujeme, aby $\varphi - \Phi = \pm 20°12'$, přičemž tuto rovnici chápeme modulo $360°$, neboť urazí-li velká ručička úhel φ je to totéž, jako by urazila $\varphi + 360°$. Odečtením obou pohybových rovnic dostáváme

$$\varphi_0 - \Phi_0 + (\omega - \Omega)\, t = \pm 20°12' + 360° k\,,$$

kde $k = 0, 1, 2, 3, 4$, protože FYKOSí Fyziklání neskončí později než po 14:00. Pro každé k dostáváme dvě řešení. Výsledný čas získáme jako $10 + t$ a výsledek zaokrouhlíme na sekundy.

k=0	09:45:25	09:52:46
k=1	10:50:52	10:58:13
k=2	11:56:20	12:03:40
k=3	13:01:47	13:09:07
k=4	14:07:14	14:14:35

17. *dědeček a řepa*

Dědeček z pohádky o řepě je již vdovec, nemá dokonce ani vnučku (ta je už za vodou) a ani drobné zvířectvo (to snědl již minulý měsíc), a proto vymyslel jiný způsob, jak dostat řepu ze země ven. Použil páku. Nechť řepa v zemi drží silou $F = 7\,\mathrm{kN}$, podpěra vysoká 5 cm je ve vzdálenosti $r = 10\,\mathrm{cm}$ od toho konce tyče, kde je řepa. Jak daleko od podpěry se má zavěsit 70 kg vážící dědeček? Uvažujte tíhové zrychlení $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Vzdálenost dědečka od podpěry označíme l. Nejdříve určíme tíhu dědečka $G = mg = 70 \cdot 10\,\mathrm{N} = 700\,\mathrm{N}$. Z rovnosti momentu sil plyne

$$Fr = Gl = mgl \quad \Rightarrow \quad l = \frac{Fr}{mg}\,,$$
$$l = \frac{7000 \cdot 0{,}1}{70 \cdot 10}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{m}.$$

Stačí tedy, když se dědeček pověsí na páku ve vzdálenosti větší než 1 m a řepa „vyjede“ ze země i bez pomoci babičky, vnuka, vnučky, pejska, kočičky a myšičky.

18. *zrcadlo z rtuti*

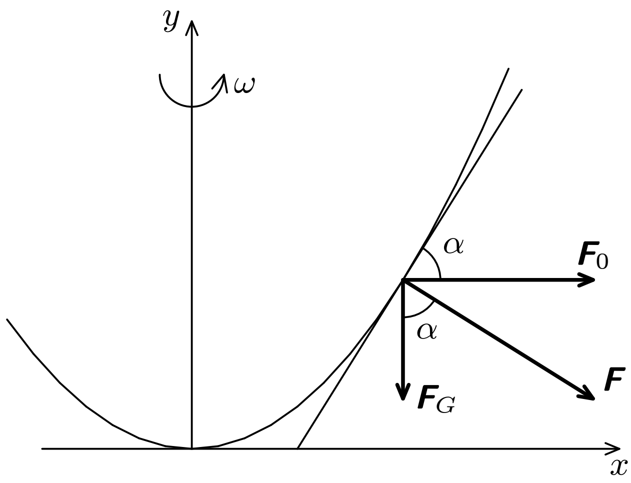
Uvažujme válcovou nádobu se rtutí. Roztočíme ji úhlovou rychlostí ω kolem rotační osy. Určete ohniskovou vzdálenost zrcadla, které vytváří povrch.

Na částici při povrchu rtuti působí síla odstředivá a $F_\mathrm{O} = m\omega^2 x$ a síla tíhová $F_\mathrm{G} = mg$. Soustava je v rovnováze, když je výslednice sil kolmá na povrch rtuti. Z obr. 6 je zřejmé, že $\mathrm{tg}\,\alpha = \omega^2 x/g$. Tento výraz udává směrnici tečny ke křivce (tedy hodnotu derivace) v každém bodě.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\omega^2 x}{g}$$

a odtud jednoduchou integrací dostaneme

$$y = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + C\,,$$



Obr. 6. Nádoba s rtutí

konstantu C položíme rovnu nule. Otáčením této paraboly získám paraboloid, který povrch rotujíci rtuti. Pro parabolu popsanou rovnicí $x^2 = 2py$ je ohnisková vzdálenost rovna $p/2$. Tudíž $f = g/(2\omega^2)$.

19. *skok do dálky*

Světový rekord ve skoku do dálky drží Mike Powell. V roce 1991 skočil do vzdálenosti 8,95 m. Jak daleko by se mu podařilo při stejně dobrém odrazu doskočit na Měsíci? (Počítejte pro parametry $R_\mathrm{Z} = 6378\,\mathrm{km}$, $M_\mathrm{Z} = 6\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$, $R_\mathrm{M} = 1740\,\mathrm{km}$ a $M_\mathrm{M} = 7{,}4\cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$)

Při řešení úlohy zanedbáváme odpor vzduchu. Skok si představíme jako šikmý vrh vzhůru. Délka vrhu je $d = v_0^2 \sin 2\alpha/g$, kde α je elevační úhel skokana a v_0 je jeho rychlost. Pro tíhové zrychlení g platí obecně vztah $g = \varkappa M/R^2$. Vztah mezi tíhovým zrychlením g_Z na povrchu Země a g_M na povrchu Měsíce je

$$g_\mathrm{M} = \frac{M_\mathrm{M} R_\mathrm{Z}^2}{M_\mathrm{Z} R_\mathrm{M}^2} g_\mathrm{Z}\,,$$

a tedy vztah mezi délkou vrhu na Měsíci a na Zemi je

$$d_\mathrm{M} = \frac{M_\mathrm{Z} R_\mathrm{M}^2}{M_\mathrm{M} R_\mathrm{Z}^2} d_\mathrm{Z}\,.$$

Po dosazení zadaných hodnot vidíme, že na Měsíci by Mike Powell skočil 54,0 m.

20. *houkající lokomotiva*

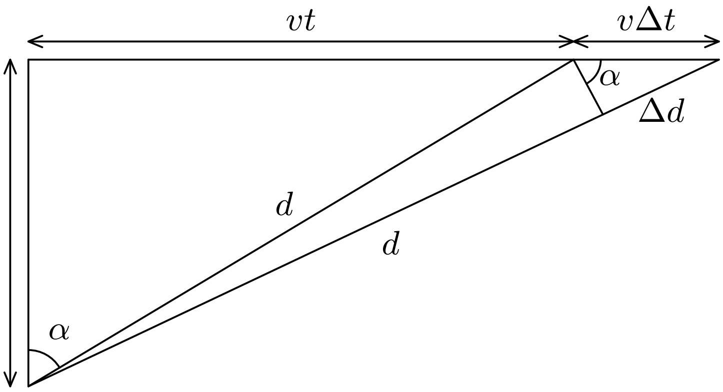
Po přímé trati jede houkající lokomotiva rychlostí v. Klidová frekvence zvuku píšťaly lokomotivy je f_0. Ve vzdálenosti l od trati stojí pozorovatel. Předpokládejte, že v čase $t = 0$ je lokomotiva nejblíže k pozorovateli a že okolní vzduch je v klidu. Jakou frekvenci zvuku slyší pozorovatel v čase t?

Představme si lokomotivu v obecné poloze ve vzdálenosti vt od polohy v čase $t = 0$ (obr. 7). Zvuk vysílaný píšťalou je periodické kmitání; jeho frekvence je počet vrcholů vlny vyslaných za

1 s. Všímejme si teď raději periody kmitání, t.j. času mezi vysláním dvou vrcholů zvukové vlny $\Delta t_0 = 1/f_0$ a odpovídajícího časového intervalu Δt, který uběhne mezi přijetím prvního a druhého vrcholu vlny u pozorovatele. Píšťala vyšle první signál v čase t; v čase t_1 počítaného od vyslání prvního signálu je tento signál přijat pozorovatelem a platí $t_1 = d/c = \sqrt{l^2 + (vt)^2}/c$, kde c je rychlost zvuku. Druhý vrchol je vyslán z píšťaly po uběhnutí času Δt_0 a v P je přijat v čase $t_2 = \Delta t_0 + (d + \Delta d)/c$.

Z obrázku vidíme, že pro malé $\Delta d \ll l$ platí velmi přesně $\Delta d = v\Delta t_0 \sin\alpha = v^2 t \Delta t_0/s$, takže po dosazení čas $t_2 = \Delta t_0 + (d + v^2 t\Delta t_0/d)/c$. Hledaný časový interval Δt mezi vrcholy vlny u pozorovatele je

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \Delta t_0 \left(1 + \frac{v^2 t}{c\sqrt{l^2 + (vt)^2}}\right),$$



Obr. 7

a tedy slyšená frekvence

$$f = 1/\Delta t = f_0 \left(1 + \frac{v^2 t}{c\sqrt{l^2 + (vt)^2}}\right)^{-1}.$$

21. *polopropustná zrcadla*

Mějme dvě polopropustná zrcadla, z nichž každé samostatně propouští 1/2 světla a 1/2 odráží. Jakou část dopadajícího světla zrcadla propustí, když je dáme jedno za druhé?

To první, co každého napadne, je 1/4. To je ale špatně, protože jsme zapomněli na světlo, které se víckrát odrazí mezi zrcadly a nakonec projde v původním směru. Takže všechno světlo spočítáme takhle. První, nejjednodušší způsob, jak se světlo dostane přes obě zrcadla, je ten, že 1/2 polovina projde přes první zrcadlo a polovina z ní (tedy 1/4 z původního světla) projde přes druhé zrcadlo, takže to je ta 1/4.

Ovšem to není všechno. Od druhého skla se odrazila 1/4 původního světla a letí zpátky k prvnímu zrcadlu, kde polovina projde a polovina, tedy celkem 1/8 původního světla se vrací k druhému zrcadlu a z něho polovina, tedy 1/16 z původního světla projde. Tedy světlo, které vykoná o dva odrazy navíc než to, které prošlo, a poté projde, je 1/4 toho předešlého prošlého. Všechno světlo tedy získáme sečtením všeho světla po všech odrazech jako

$$1/4 + 1/16 + 1/64 + 1/256 + ... = 1/4.(1 + 1/4 + 1/16 + ...) = 1/3.$$

22. *vlak z Helsinek*

Z finských Helsinek jede vlak rychlostí 54 km/h po naprosto rovných kolejích severním směrem. Lokomotiva vlaku váží 67 t, první vagon váží třikrát méně než lokomotiva a každý další vagon váží třikrát méně než ten předchozí. Vagonů je celkem 50. Určete s přesností 5% a velikost horizontální složky síly, kterou celý vlak působí na koleje. Polohu Helsinek vhodně odhadněte.

Hmotnost vlaku určíme jako součet geometrické řady. Vzhledem k poskytnuté toleranci je však možné hmotnost rovnou odhadnout na zhruba 100 tun. Vlak tlačí na koleje v horizontálním směru v důsledku Coriolisovy síly. To je nepravá síla působící v otáčejících se soustavách. Velikost Coriolisovy síly v našem případě je

$$F_\mathrm{c} = 2m\omega v \sin\alpha\,,$$

kde ω je úhlová rychlost otáčení Země kolem osy a α je zeměpisná šířka Helsinek, kterou jste jistě správně odhadli na 60 stupňů severní šířky. Číselně dostáváme $F = (190 \pm 10)\,\mathrm{N}$.

23. *bruslař*

Bruslař o hmotnosti $m_1 = 80\,\mathrm{kg}$ stojí na bruslích na hladkém ledu. Do pohybu se uvede tím, že ve vodorovném směru odhodí před sebe těleso o hmotnosti $m_2 = 5\,\mathrm{kg}$ rychlostí o velikosti $v_2 = 4\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Do jaké vzdálenosti bruslař po odhození tělesa odjede, je-li součinitel tření mezi ledem a bruslemi $f = 0{,}01$.

Počáteční rychlost, se kterou se bruslař pohybuje, určíme ze zákona zachování hybnosti.

$$m_1 v_1 = m_2 v_2\,.$$

Dále můžeme pohyb popisovat jako rovnoměrně zpomalený díky třecí síle $F_\mathrm{t} = f m_1 g$, odpovídající zrychlení má tedy velikost $a = fg$ a má opačný směr než rychlost bruslaře. Výsledná dráha, kterou bruslař urazí, bude rovna

$$s = \frac{v_1^2}{2a} = \frac{m_2^2 v_2^2}{2fgm_1^2}\,.$$

Číselně dostáváme $s = 0{,}32\,\mathrm{m}$.

24. *netradiční ohřívání čaje*

Jaký počet nábojů n je zapotřebí k uvaření čaje o hmotnosti $m_\mathrm{v} = 250\,\mathrm{g}$? K dispozici máte ocelovou polní konvičku o hmotnosti $m_\mathrm{o} = 4\,\mathrm{kg}$ a samopal. Náboje mají hmotnost 16 g a rychlost $700\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, měrná tepelná kapacita vody je $c_\mathrm{v} = 4180\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$, měrná tepelná kapacita oceli je $c_\mathrm{o} = 450\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$, počáteční teplota vody a konvičky je $t_0 = 5\,^\circ\mathrm{C}$, Uvažujte, že veškerá energie se přemění v teplo.

Nejprve vyjádříme teplo, které je nutné dodat soustavě, aby teplota vzrostla z původní t_0 na konečnou t

$$Q = (m_\mathrm{o}c_\mathrm{o} + m_\mathrm{v}c_\mathrm{v})\,(t - t_0)\,.$$

Kinetická energie n kulek je dána vztahem $T = 1/2\,nmv^2$. Kinetická energie kulek se přemění na teplo dodané soustavě. Platí tedy

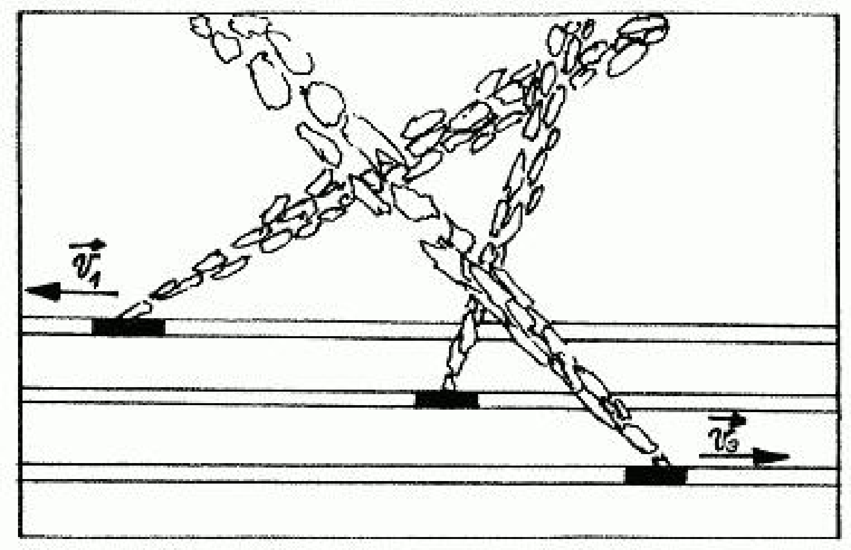
$$(m_\mathrm{o}c_\mathrm{o} + m_\mathrm{v}c_\mathrm{v})(t - t_0) = \frac{1}{2}nmv^2 \quad\Rightarrow\quad n = \frac{2(m_\mathrm{o}c_\mathrm{o} + m_\mathrm{v}c_\mathrm{v})(t - t_0)}{mv^2}$$

$$n = \frac{2(4\cdot 450 + 0,25\cdot 4180)(100 - 5)}{0,016\cdot 700^2} = 69\,.$$

Na ohřátí čaje bude potřeba 69 kulek.

25. *jak rychlá je lokomotiva?*

Na obrázku 8 je letecký snímek parních lokomotiv s oblaky páry pohybujících se rovnoměrně po přímých rovnoběžných kolejích. Rychlost první lokomotivy je $v_1 = 50\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$, rychlost třetí $v_3 = 70\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Směry rychlostí jsou vyznačeny na obrázku. Jaká je rychlost druhé lokomotivy? Při řešení předpokládejte, že kouř se ve vzduchu velmi rychle zabrzí (až na vertikální pohyb) a je vůči němu v klidu.



Obr. 8. Lokomotivy

Směr zleva doprava zvolíme za kladný směr osy x, osa y budiž kolmá na koleje a kladná v polorovině, kde se nachází kouř. Úhly budeme měřit od kolejí proti směru hodinových ručiček. Pak můžeme zapsat rychlosti následujícím způsobem

$$v_1 = -50\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}\,\boldsymbol{v_1} = -50\boldsymbol{x}\alpha_1 = 30^\circ$$

$$v_3 = 70\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}\,\boldsymbol{v_2} = 70\boldsymbol{x}\alpha_3 = 135^\circ$$

$$v_2 = ?\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}\alpha_3 = 70^\circ$$

$$\boldsymbol{v_v} = v_{vx}\boldsymbol{x} + v_{vy}\boldsymbol{y}.$$

Nejdříve určíme rychlost větru $\boldsymbol{v_v}$. Pro úhel, který svírá směr kouře s kolejemi, můžeme napsat vztah

$$\operatorname{cotg}\alpha_i = \frac{(v_{vx} - v_i)t}{v_{vy}t} = \frac{(v_{vx} - v_i)}{v_{vy}}, \tag{1}$$

kde v_i je rychlost i-té lokomotivy a α_i příslušný úhel. Ze známých hodnot pro první a druhou lokomotivu vypočteme rychlost větru po vyřešení soustavy rovnic a získáme

$$v_{vx} = \frac{v_1\operatorname{tg}\alpha_1 - v_2\operatorname{tg}\alpha_3}{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_3} = 26\,\mathrm{km\cdot h^{-1}},$$

$$v_{vy} = \frac{v_2 - v_1}{\operatorname{cotg}\alpha_1 - \operatorname{cotg}\alpha_3} = 44\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}.$$

Nyní využijeme vztahu (1) pro lokomotivu 2 a získáme

$$v_2 = v_{vx} - v_{vy}\operatorname{cotg}\alpha_2 = \frac{v_1\operatorname{tg}\alpha_1(1 - \operatorname{tg}\alpha_3/\operatorname{tg}\alpha_2) - v_3\operatorname{tg}\alpha_3(1 - \operatorname{tg}\alpha_1/\operatorname{tg}\alpha_2)}{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_3} = 10\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}.$$

Druhá lokomotiva se tedy pohybuje rychlostí $10\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ v kladném směru (doprava), tedy ve směru druhé lokomotivy.

26. *proděravěná nádoba*

Na stole je válcová nádoba o celkové výšce $h = 25\,\mathrm{cm}$ celá naplněná vodou. V její stěně uděláme ve výšce $h_1 = 9\,\mathrm{cm}$ nad povrchem stolu otvor. Do jaké vzdálenosti dopadne vodní paprsek?

Z otvoru bude voda vytékat rychlostí $v = \sqrt{2g(h - h_1)}$, kolmo ke stěně nádoby. Každá z částic tedy opisuje trajektorii vodorovného vrhu z výšky h_1. Vzdálenost, do které vodní paprsek dopadne, tedy bude

$$d = v\sqrt{\frac{2h_1}{g}} = \sqrt{2g(h - h_1)}\sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 2\sqrt{h_1(h - h_1)}\,.$$

Číselně vychází $d = 24\,\mathrm{cm}$.

27. *kulička na vlákně*

Těleso o hmotnosti 0,3 kg zavěšené na tenkém vlákně délky $l = 7\,\mathrm{cm}$ vychýlíme o úhel $\alpha = 60^\circ$ a z klidu ho pustíme. Určete tahovou sílu, kterou působí vlákno na závaží v okamžiku, kdy prochází svislou polohou.

Při průchodu svislou polohou na těleso působí tahová síla vlákna $\boldsymbol{F}$ a tíhová síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{G} = m\boldsymbol{g}$. Protože se těleso pohybuje po části kružnice o poloměru l, je jejich výslednice dostředivou silou tohoto pohybu a má velikost

$$F - F_\mathrm{G} = \frac{mv^2}{l}\,.$$

Rychlost tělesa v tomto okamžiku můžeme určit ze zákona zachování energie. Jeho kinetická energie je rovna počáteční potenciální energii.

$$\frac{mv^2}{2} = mg(l - l\cos\alpha)\,.$$

Kombinací těchto dvou vztahů získáváme

$$F = mg + \frac{2mgl(1 - \cos\alpha)}{l} = mg(3 - 2\cos\alpha) \approx 5{,}9\,\mathrm{N}\,.$$

28. *srážka dvou kamenů*

Kámen o hmotnosti $m_1 = 0{,}3\,\mathrm{kg}$ je v klidu na vodorovném hladkém ledu. Náhle do něj narazí druhý kámen o hmotnosti $m_2 = 0{,}2\,\mathrm{kg}$ pohybující se vodorovně rychlostí $v_2 = 14\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a odrazí se vodorovně v pravém úhlu ke svému původnímu směru rychlostí $v_2' = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Určete, pod jakým úhlem α vzhledem k původnímu směru pohybu druhého kamene se bude první kámen pohybovat. Tření mezi ledem a kamenem neuvažujeme.

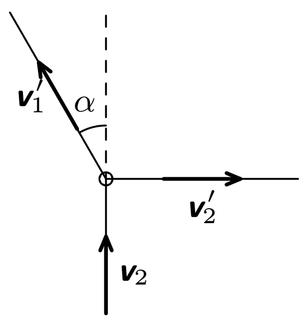
Napíšeme si zákon zachování hybnosti ve směru rychlostí v_2 a v_2'.

$$m_2 v_2 = m_1 v_1' \cos\alpha\,, \qquad m_2 v_2' = m_1 v_1' \sin\alpha\,.$$

Podělením obou rovnic triviálně dostáváme

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_2'}{v_2}\,,$$

odkud již lehce určíme požadovaný úhel $\alpha = 36^\circ$.



Obr. 9. Srážka

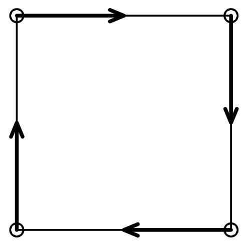
29. *akvárium*

Akvárium tvaru duté polokoule o poloměru $R = 15\,\mathrm{cm}$ je naplněno až po okraj vodou. Jakou práci vykonáme při jeho vylití?

V každém okamžiku se při vylévání nachází těžiště vody, která zůstala v akváriu, v ose otáčení. Moment tíhové síly je nulový. Při vylévání tedy žádnou práci nekonáme.

30. *želvičky*

Čtyři milé želvičky s velkými krunýři stojí v rozích čtverce o straně 1 m. Najednou se začnou všichni čtyři obojživelníci pohybovat rychlostí $10\,\mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}$ ve směru želvičky před nimi jako na obrázku 10. Jako celek se pohybují ve směru hodinových ručiček, jdou pořád jedna želvička za druhou. Po spirále se setkají ve středu čtverce. Určete, v jakém čase se tak stane.



Obr. 10. Želvičky

Ze symetrie úlohy plyne, že uskupení želviček bude mít v každém čase tvar čtverce. Všechny tyto čtverce budou mít společný střed, do něhož želvičky směřují. Rychlost želvičky lze rozložit na složku směřující do středu čtverce a mimo čtverec.

Pouze složka rychlosti směřující do středu čtverce bude způsobovat pohyb želvičky do středu. Složka vektoru rychlosti směřující do středu čtverce a vektor okamžité rychlosti svírají v každém čase úhel 45° (stále jde o čtverec), a tedy velikost této složky je rovna $(1/\sqrt{2})$-násobku rychlosti. Úloha je tedy ekvivalentní s tím, jako by želvička mířila rovnoměrným přímočarým pohybem do středu čtverce rychlostí $(10/\sqrt{2})\,\mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}$. Želvička musí dostředným pohybem urazit dráhu $1/\sqrt{2}\,\mathrm{m}$, výsledný čas je tedy roven $10\,\mathrm{s}$.

31. *mravenec na provázku*

Na provázku zavěšeném na kladce visí na každém konci závaží o hmotnosti M. Jde kolem mravenec o hmotnosti m a řekne si, že vyleze nahoru. Je to mravenec-sportovec, a tak se po provázku pohybuje rovnoměrně zrychleně se zrychlením a. Určete výsledné zrychlení A soustavy provázek a závaží. Provázek a kladka jsou nehmotné, provázek se nedeformuje.

V soustavě spojené s kladkou

V této soustavě se mravenec pohybuje s celkovým zrychlením $(a - A)$ ve směru nahoru. Na mravence-sportovce působí gravitační síla velikosti mg ve směru dolů. Když se mravenec chce pohnout, musí na něj působit zatím neznámá síla velikosti N ve směru nahoru. Jejím původcem je samozřejmě mravenec a vzniká v důsledku zákona akce a reakce, kdy mravenec působí na soustavu provázek + obě závaží silou velikosti N směrem dolů. Žádné jiné síly působící na mravence již nenajdeme a tak celková sila na něj působící je velikosti $-mg + N$, která je podle Newtonova zákona síly rovná výrazu $m(a - A)$. Zčehož $N = mg + m(a - A)$.

Provázek je pevně spojený s oběma závažími, tato soustava má tedy hmotnost $2M$. Na provázek působí síla N. Gravitační síla působící na obě závaží je stejně veliká ale opačného směru, teda se navzájem vyruší. Z čeho dostaneme podle Newtonova zákona síly výslednou rovnost $2MA = N = mg + m(a - A)$.

V soustavě spojené s provázkem

V této soustavě se mravenec pohybuje celkovým zrychlením $a - A$ směrem nahoru. Na mravence-sportovce působí kromě gravitační síly velikosti mg v směru dolů taktéž (fiktivní) síla setrvačnosti velikosti mA ve směru nahoru. Mravenec opět působí na provázek silou N směrem dolů a podle zákona akce a reakce působí na mravence síla velikosti N ve směru nahoru. Žádné jiné síly působící na mravence již nenajdeme, a tak celková síla na něj působící je velikosti $n - mg + mA$, která je podle Newtonova zákona síly rovná výrazu ma. Z čehož $N = mg + m(a - A)$. Na soustavu provázku a dvou závaží o hmotnosti $2M$ působí zmíněná síla N ve směru dolů a také (fiktivní) síla setrvačnosti velikosti $2MA$. Protože jsme ve soustavě pevně spojené s provázkem, musí být jeho celkové zrychlení v téhle soustavě nulové. Síla setrvačnosti musí být tedy rovná síle N, z čehož dostaneme podle Newtonova zákona síly výslednou rovnost $2MA = N = mg + m(a - A)$.

V obou případech jsme došli k výslednému zrychlení

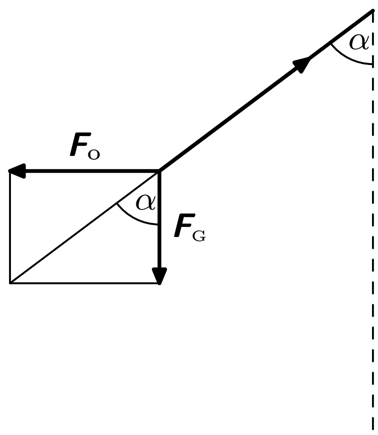
$$A = \frac{m(g+a)}{2M+m}\,.$$

32. *kolotoč*

Představme si rotující vodorovný disk. V jeho středu je připevněné kyvadélko. Protože na něj působí odstředivá síla, odchýlí se o úhel α od svislého směru. Určete tento úhel, pokud je délka kyvadélka 1 m a frekvence jeho otáčení 0,25 Hz.

V této úloze záleží na tom, jak je kulička spojena se středem otáčejícího se disku. Pokud je spojena vazbou, která není schopna přenášet rotační pohyb, pak se kulička ani nehne. Předpokládejme, že je kulička spojena s diskem například nehmotnou tyčí připevněnou k disku tak, aby se točila a zároveň se mohla vychylovat.

Nyní se podívejme na to, o jaký úhel se vlastně kyvadélko vychýlí. Z neinerciální soustavy spojené s kuličkou, působí na kuličku síla tíhová, setrvačná odstředivá a reakce lanka. Všechny tyto síly se navzájem vyruší (kulička je totiž sama vůči sobě v klidu). Z geometrie sil dle obrázku 11 plyne



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m\omega^2 r}{mg}\,,$$

Obr. 11

kde m je hmotnost kuličky, ω úhlová frekvence, α úhel odklonění, g hodnota gravitačního zrychlení na povrchu Země a r vzdálenost kuličky od osy otáčení a platí pro něj $r = l\sin\alpha$, kde l je délka závěsu. Dosazením do rovnice získáváme

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m\omega^2 l\sin\alpha}{mg}\,,$$

$$\sin\alpha\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{\omega^2 l}{g}\right) = 0\,.$$

Tato rovnice má 2 řešení

$$\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 l}\,,$$

$$\sin\alpha = 0\,.$$

Pravá strana první rovnice vyjde po dosazení $\omega = 2\pi f$ číselně přibližně 4. Jenže kosinus reálného úhlu takový být nemůže a tedy platí pouze druhá rovnice. Výsledek z druhé rovnice $\alpha = 0$, znamená, že se kulička bude otáčet, ale zůstane na ose disku, toto řešení je stabilní poloha kuličky.

33. *kapička*

Z jaké minimální výšky musíme pustit kapičku vody poloměru $R = 1\,\mathrm{mm}$ na dokonale nesmáčivou podložku, aby se rozdělila na dvě kapičky? Znáte její povrchové napětí $\sigma = 72\,\mathrm{mN{\cdot}m^{-1}}$ a hustotu $\varrho = 998\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

Řešení úlohy vychází ze zákona zachování energie. Víme, že povrchová energie je totéž jako povrchové napětí, a je-li toto kladné, pak to znamená, že k rozšíření povrchu kapičky je třeba vykonat danou práci. Tuto práci získáme díky polohové energii kapičky na počátku děje ve výšce h, kterou máme určit. Protože se má kapička rozdělit na dvě stejné polokoule, součet jejich povrchů bude o $2\pi R^2$ větší než původní kapky (jsou to dvě rovinné plošky ve styku s nesmáčivou podložkou). Nyní již snadno dáme do rovnosti

$$mgh = \sigma \Delta S\,.$$

Hmotnost se zachovává $m = 4/3\pi R^3 \varrho$, dále podle textu výše $\Delta S = 2\pi R^2$, a tedy po dosazení získáme výsledný vztah

$$h = \frac{2\pi R^2 \sigma}{mg} = \frac{3\sigma}{2R\varrho g}\,,$$

což je číselně $h \approx 11\,\mathrm{mm}$.

34. *vlak v zatáčce*

Vlak jedoucí počáteční rychlostí $90\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ rovnoměrně zpomaluje v zatáčce o poloměru $200\,\mathrm{m}$ tak, že po projetí oblouku 60° je jeho rychlost o $10\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ menší. Určete okamžité zrychlení (tedy velikost zrychlení a úhel, který vektor zrychlení svírá se směrem pohybu) kuličky volně položené na vodorovné podlaze vagónu v tomto okamžiku.

Pohyb kuličky popisujeme v soustavě spojené s vlakem, která je neinerciální. Protože je kulička volně položená, její zrychlení bude stejné velikosti a opačného směru než zrychlení soustavy (vlaku). Zrychlení vlaku můžeme rozložit na normálovou složku a_n a tečnou složku a_t. Normálová složka odpovídá změně směru vlaku, tzv. dostředivému zrychlení, a je dána vztahem $a_\mathrm{n} = v^2/R$, kde v je okamžitá rychlost a R poloměr zakřivení trajektorie. Do tohoto vztahu dosadíme ze zadání a získáme $a_\mathrm{n} = 2{,}469\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Tečná složka a_t odpovídá změně velikosti rychlosti. Dráha a rychlost rovnoměrně zpomaleného pohybu je dána vztahy

$$v = v_0 - a_\mathrm{t} t\,, \qquad s = v_0 t - a_\mathrm{t} t^2/2\,,$$

kam dosadíme ze zadání $v = 80\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}} = 22{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $v_0 = 90\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}} = 25\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a $s = 200\,\mathrm{m}$ a po vyřešení této soustavy 2 rovnic získáme $a_\mathrm{t} = (v_0^2 - v^2)/(2s) \doteq 0{,}328\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Celkové zrychlení kuličky a je pak složením těchto dvou zrychlení a pro jeho velikost platí vztah

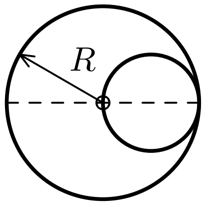
$$a = \sqrt{a_\mathrm{t}^2 + a_\mathrm{n}^2} \doteq 2{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Pro úhel α mezi směrem pohybu, tedy směrem tečného zrychlení a směrem celkového zrychlení platí

$$\mathrm{tg}\,\alpha = a_\mathrm{n}/a_\mathrm{t} \doteq 7{,}5 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 82^\circ\,.$$

35. *válec*

V dutém válci poloměru R, který je pevně připevněn k podložce (betonové potrubí) je nehmotný válec o polovičním poloměru $R/2$ s malou hmotnou kuličkou hmotnosti m připevnenou na jeho obvod v bodě A *(obr. 12). Menší válec pustíme a ten se kvůli zátěži kuličky začne odvalovat dolů. Mezi válci působí dokonalé tření, takže malý se po velkém jenom odvaluje, ale nesmýká. Určete čas, za který bude válec procházet nejnižší polohou.*



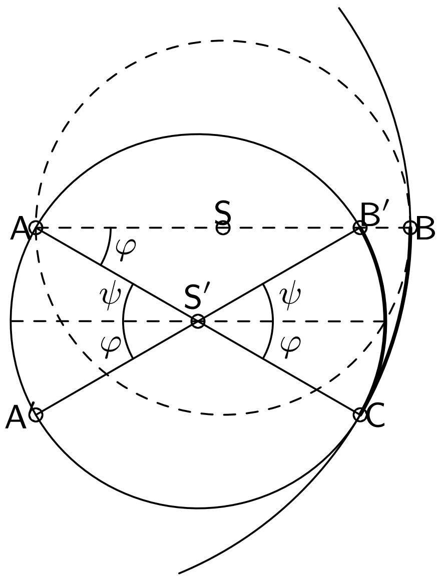
Obr. 12. Válce

Nejdříve ukážeme, že kulička se bude pohybovat po svislé úsečce dolů. Všimněme si obrázku. Je na něm vyznačena počáteční poloha vnitřního válce; v bodě A je kulička, v bodě B se válce dotýkají.

Teď válec necháme trochu se odvalit tak, aby se bod doteku posunul o úhel φ, a nový bod doteku označíme C. Ale pozor: to je jen geometrický bod doteku. Body A, B válce se přemístily do nových poloh A', B'. Protože válce se po sobě odvalovaly a nedošlo ke smyku, je délka oblouku BC stejná jako délka oblouku B'C.

Jaký je úhel $\alpha = \varphi + \psi$ mezi AB, A'B'? Je to

$$\alpha = \frac{|\mathsf{B'C}|}{R/2} = \frac{|\mathsf{BC}|}{R/2} = 2\varphi.$$



Obr. 13. Odvalování válce

Navíc vidíme, že φ je měřen od vodorovné přímky, takže je $\psi = \alpha - \varphi = \varphi$. A protože $|\mathsf{AS'}| = |\mathsf{AS}| = R/2$, trojúhelník AS'A' je rovnostranný a bod A' musí ležet na svislici z A dolů. Protože to platí pro každý úhel φ, kulička se pohybuje po přímé dráze dolů. Protože ji nic nebrzdí (válec je nehmotný), pohybuje se kulička volným pádem.

Doba trvání tohoto volného pádu je $t = \sqrt{2R/g}$.

36. *Dadarinův stroj*

Poslední záblesky od fotografů a již může statečný soudruh Dadarin spustit svůj stroj. Tedy přesněji řečeno uvolnit svou loď do chřtánu šachty vedoucí skrz střed Země až do Austrálie. Za jak dlouho ho mohou očekávat novináři poprvé zpátky? Předpokládejte, že se žádná energie neztrácí žádným třením ani nárazem a Země je vyrobena jako homogenní koule o poloměru 6370 km a šachta má zanedbatelný průměr. Tíhové zrychlení na povrchu je 9,81 $\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Když jsme uvnitř koule ve vzdálenosti r od jejího středu, působí na nás gravitační síla odpovídající situaci, kdybychom stáli na povrchu koule s poloměrem r. Působí na nás tedy síla o velikosti

$$F = mg\frac{r}{R_\mathrm{Z}}\,,$$

kde R_z je poloměr Zeměkoule a m hmotnost Dadarinova stroje. Situace je tedy vlastně fyzikálně ekvivalentní se situací, kdyby Dadarin osciloval na pružině tuhosti $k = mg/R_\mathrm{Z}$. Perioda takových kmitů je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{R_\mathrm{Z}}{g}} \doteq 5060\,\mathrm{s} = 84{,}4\,\mathrm{min}.$$

37. *dvě kosmické lodi*

Dvě kosmické lodi letí po stejné kruhové dráze stejným směrem ve výšce $h = 1000\,\mathrm{km}$ nad povrchem Země a jsou od sebe vzdáleny $l = 1\,\mathrm{km}$. Jakou rychlost mají dodat motory druhé lodi, aby první dohnala za dobu jednoho oběhu kolem Země? Předpokládejte, že změna rychlosti nastala ve velmi krátkém čase, že $l \ll h$ a že není nutno lodím bránit ve srážce.

Pro družici na oběžné dráze platí Keplerovy zákony. Jestliže předpokládáme změnu rychlosti ve směru tečném na poloměr původní dráhy rakety, z 2. Keplerova zákona máme

$$\frac{1}{2} rvT = \pi ab,$$

kde r je poloměr původní dráhy rakety, v je nová rychlost druhé lodi po krátkém zapnutí motorů, T je doba oběhu, a a b jsou poloosy její nové dráhy. Z geometrie elipsy vyplývá $b = \sqrt{2ar - r^2}$ a z toho

$$v = \frac{2\pi a}{T}\sqrt{\frac{2a}{r} - 1}. \tag{2}$$

Ze 3. Keplerova zákona víme $a^3/r^3 = T^2/T_\mathrm{k}^2$, kde $T_\mathrm{k} = 2\pi r/v_\mathrm{k}$ je doba oběhu po kruhové dráze a $v_\mathrm{k} = \sqrt{\varkappa M_\mathrm{Z}/r}$ je příslušná kruhová rychlost. Odtud dostaneme

$$a = r\left(\frac{T}{T_\mathrm{k}}\right)^{2/3}.$$

Tento vztah dosadíme do (2) a upravíme na tvar

$$v = \frac{2\pi r}{T}\left(\frac{T}{T_\mathrm{k}}\right)^{2/3}\sqrt{2\left(\frac{T}{T_\mathrm{k}}\right)^{2/3} - 1} = v_\mathrm{k}\sqrt{2 - \left(\frac{T_\mathrm{k}}{T}\right)^{2/3}}.$$

Raketa zrychlí o

$$\Delta v = v_\mathrm{x} - v_\mathrm{k} = v_\mathrm{k}\left(\sqrt{2 - \left(\frac{T_\mathrm{k}}{T}\right)^{2/3}} - 1\right),$$

kde v_k, T_k lehce vyjádříme a $T = T_\mathrm{k} - l/v_\mathrm{k}$. Po číselném dosazení $\Delta v = -0{,}0530\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Vidíme, že druhá raketa, aby dohnala raketu první, musí zpomalit.

38. *Coulomb versus Newton*

Dvě stejné malé kuličky hmotnosti $m = 1\mathrm{g}$ visí na dvou nitích stejné délky $l = 1\mathrm{m}$. Obě nitě jsou zavěšeny v témž bodě. Nabijeme-li obě kuličky nábojem velikosti q, rozestoupí se tak, že nitě svírají vzájemně pravý úhel. Určete velikost q, pakliže gravitační zrychlení je $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a permitivita vakua je $\varepsilon_0 = 8{,}8 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F\cdot m^{-1}}$.

Vzdálenost kuliček v rovnováze označíme r. Na každou kuličku působí ve svislém směru gravitační síla a ve vodorovném Coulombova síla, pro zachování rovnováhy v dané poloze musí platit

$$\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}\right)\frac{1}{mg} = \mathrm{tg}\,45^\circ = 1,$$

za r^2 dosadíme z Pythagorovy věty $r^2 = 2l^2$ a náboj q vyjádříme jako

$$q = \sqrt{8\pi\varepsilon_0 l^2 mg} \doteq 1{,}5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}.$$

39. *vodík a kyslík*

Máme pořádně pevný reaktor objemu $V = 0{,}02\,\mathrm{m}^3$ a v něm přepážkou oddělené dva plyny teploty $T_0 = 293\,\mathrm{K}$: 2 moly vodíku a jeden mol kyslíku. Víme, že při vzniku jednoho molu vody se uvolní energie $E = 286\,\mathrm{kJ}$. Teď přepážku odstraníme. Jaká bude teplota a tlak vodní páry v reaktoru po reakci? Vibrační stupně volnosti molekul neuvažujte.

Úlohu bude pravděpodobně nejvýhodnější řešit s využitím zákona zachování energie. Jestliže budeme předpokládat, že „reaktor“, kde reakce probíhá, je adiabaticky utěsněn a jeho stěny jsou dostatečně pevné, aby se nekonala žádná objemová práce, tak se celková vnitřní energie soustavy bude zachovávat. Jinými slovy se reaktor navenek bude chovat jako izolovaný systém, a tudíž je z hlediska vnitřní energie jedno, zda uvnitř nějaká reakce probíhat bude, či nikoliv. Vnitřní energie vzniklé vodní páry uvažované jakožto tříatomový ideální plyn tedy bude rovna součtu vnitřních energií obou plynů na počátku „experimentu“.

$$E + \frac{5}{2}RT_0 n_{\mathrm{H_2}} + \frac{5}{2}RT_0 n_{\mathrm{O_2}} = \frac{6}{2}RT n_{\mathrm{H_2O}}\,,$$

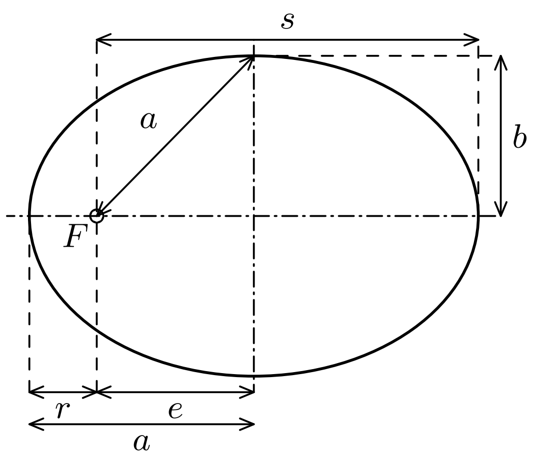
kde dle zadání úlohy je $n_{H_2} = 2\,\mathrm{mol}$, $n_{O_2} = 1\,\mathrm{mol}$, a tudíž $n_{H_2O} = 2\,\mathrm{mol}$. Snadná úprava nám následně poskytne již finální kýžený vztah pro teplotu vodní páry T, a sice

$$T = \frac{5}{4}T_0 + \frac{E}{6R}\,.$$

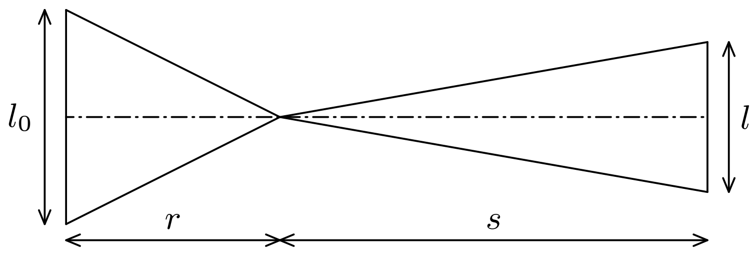
Pro hodnoty ze zadání obdržíme číselný výsledek $T \doteq 6100\,\mathrm{K}$.

40. *skály*

Dvě malé skály o hmotnostech $m_1 = 1 \cdot 10^7$ kg a $m_2 = 2 \cdot 10^7$ kg se pohybují blízko sebe v centrálním gravitačním poli po eliptické dráze s hlavní poloosou $a = 14 \cdot 10^8$ km a vedlejší poloosou $b = 7 \cdot 10^8$ km. V periheliu je vzdálenost obou těles $l_0 = 100\,\mathrm{km}$, určete jejich vzdálenost v afeliu.



Obr. 14. Eliptická dráha



Obr. 15. Parametry

Označení rozměrů eliptické dráhy viz obr. 14. Platí

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}\,,$$
$$r = a - e = a - \sqrt{a^2 - b^2}\,,$$
$$s = a + e = a + \sqrt{a^2 - b^2}\,.$$

Druhý Keplerův zákon nám říká, že plocha obsaná průvodičem za jednotku času je konstantní. Protože vzdálenost l_0 je o mnoho řádů menší než a, můžeme Keplerův zákon aproximovat (viz obr. 15). Položíme obě trojúhelníkové plochy do rovnosti a vyjádříme z nich l.

$$\frac{l_0 r}{2} = \frac{ls}{2} \quad \Rightarrow \quad l = l_0 \frac{a-e}{a+e} = l_0 \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} = l_0 \frac{1 - \sqrt{1 - (b/a)^2}}{1 + \sqrt{1 - (b/a)^2}} \,.$$

Číselně vychází $l = 7\,\mathrm{km}$.

41. *dvě bubliny*

Na velkou bublinu poloměru se přilepila menší bublina tak, že jejich poloměry po přilepení jsou R, r. Jaký poloměr má mýdlová blána společná pro velkou a malou bublinu?

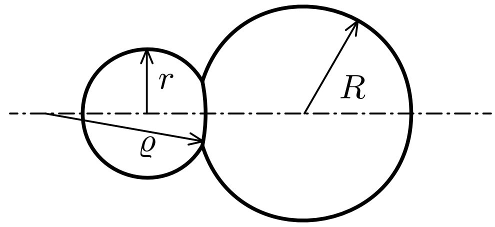
Obě mýdlové bubliny (o poloměrech R a r, kde bez újmy na obecnosti $R > r$) se spojí tak, že povrch jimi sdílený bude částí kulové plochy o poloměru ϱ, jehož určení je cílem této úlohy. Zmiňovaný povrch bude prohnut do větší z obou bublin v důsledku skutečnosti, že kapilární tlak bude vyšší v menší bublině. Jeho poloměr určíme z podmínky rovnosti tlaků v obou bublinách.

Čili hledáme ϱ splňující rovnost

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\varrho}.$$

Úpravou dostaneme, že

$$\varrho = \frac{Rr}{R - r}.$$



Obr. 16. Řez bublinami

42. *skleněný půlválec*

Na vodorovnou stěnu skleněného půlválce vzniklého rozřezáním válce v rovině rovnoběžné s jeho osou a procházející středem dopadá rovnoběžné světlo. Jakou částí zaoblené stěny vychází světlo ven z půlválce?

Uvažme nejdřív, že světlo dopadá na rovnou plochu pod úhlem 0° (od kolmice). Potom projde rozhraním vzduch–sklo bez lomu a dopadne na rozkraní sklo–vzduch pod úhlem α. Na tomto rozhraní dojde k lomu od kolmice nebo, pokud je úhel α dostatečně velký, také k úplnému odrazu, pro nějž platí tato podmínka $\sin\alpha \geq 1/n$.

Úhel 2α vytíná na půlválci výseč tak, že jeho osa je shodná s kolmicí na rovnou plochu půlválce. Jenom touto výsečí může procházet světlo ven, protože za jejími hranicemi dojde k úplnému odrazu (a toto odražené světlo už se dostane z půlválce jenom přes rovnou plochu, protože pokud se ve válci ještě potká s jiným rozhraním, nastatne tam opět úplný odraz). Proto plocha, přes kterou z kulaté části půlválce vychází světlo je $2\alpha/\pi \cdot S_v$.

Pokud je paprsek vychýlený o nějaký úhel ψ od kolmice, tato výseč se zřejmě otočí o úhel φ, který spočítáme ze zákona lomu:

$$\sin\varphi = \frac{\sin\psi}{n}$$

Musíme si ale dát pozor, aby nám při tomto otočení nějaká část z výseče nedostala mimo půlválec. Pro úhel posunutí tedy musí platit $\varphi + \alpha \leq \pi/2$. Po úpravě pro extrémní případ

($\psi = \pi/2$) dostaneme $n \leq \sqrt{2}$. Pokud bude tedy index lomu válce takový, bude světlo vždy vycházet pouze výsečí o šíři 2α, jinak výsečí o šíři $\pi/2 - \varphi + \alpha$. Plocha, kterou bude vycházet z půlválce světlo tedy bude

$$S = \frac{2\alpha}{\pi} \cdot S_v, \qquad (n \leq \sqrt{2}),$$

$$S = \left[1 - \frac{2}{\pi}\left(\arcsin\frac{\sin\psi}{n} - \arcsin\frac{1}{n}\right)\right] S_v, \qquad (n > \sqrt{2}).$$

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.