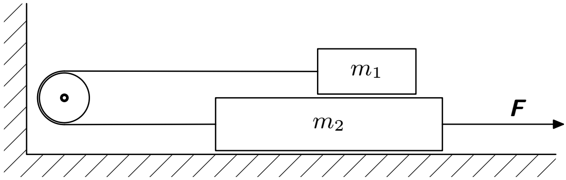
Řešení úloh 5. ročníku FYKOSího Fyziklání

Úloha 1 ... *záludné kvádry*

Jak velká musí být síla $\boldsymbol{F}$ *vyznačená na obrázku, aby udělila kvádru o hmotnosti* $m_1 = 200\,\mathrm{g}$ *zrychlení* $a = 30\,\mathrm{cm{\cdot}s^{-2}}$*? Koeficient tření mezi dvěma kvádry, stejně tak mezi těžším kvádrem a podložkou je* $k = 0{,}15$*. Menší kvádr má hmotnost* $m_2 = 700\,\mathrm{g}$.

V první řadě si musíme všimnout, že je třeba převést jednotky. Dále se zamyslíme nad tím, jaké síly zde vystupují. Ve vertikálním směru je to pouze tíhová a normálová síla. $F'_\mathrm{N} = m_1 g$ pro vrchní blok a $F_\mathrm{N} = (m_1 + m_2)g$ pro celou soustavu. Dále se zamyslíme nad třecími koeficienty. Tření mezi jednotlivými bloky vyjádříme jako km_1g, analogicky pak vyjádříme tření mezi celou soustavou a podložkou. Vzpomeneme si na rovnost $F = ma$ a zahrneme tření



Obr. 1. Schéma situace s kvádry

$$T - km_1g = m_1a\,,$$
$$F - T - km_1g - k(m_1 + m_2)g = m_2a\,,$$
$$F = (m_1 + m_2)a + k(3m_1 + m_2)g = 2{,}18\,\mathrm{N}\,.$$

Úloha 2 ... *kosmická loď*

Kosmická loď tvaru krychle o hraně $a = 100\,\mathrm{m}$ *je nastavena jednou ze svých stěn ke Slunci a využívá ke svému urychlení pouze tlak záření vycházející z něj. Za jakých okolností bude mechanická síla předávaná kosmické lodi větší pokud bude a) loď potřena ideálně černou barvou, b) dokonale lesklá? Jaký bude poměr působících sil ve výše uvedených případech?*

Působící síla je rovna změně hybnosti fotonů, které s ní interagují. Proto je síla působící na lesklou loď dvakrát větší než pro černou.

Úloha 3 ... *ledový měsíc*

Hypotetický měsíc tvořený pouze vodním ledem roztaje. Jak se změní jeho poloměr, když původní poloměr byl stejný jako u měsíce Jupitera Europa $R_\mathrm{E} = 1570\,\mathrm{km}$*? Hustota ledu je* $\varrho_\mathrm{L} = 920\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

Protože voda má větší hustotu než led, poloměr Europy se zmenší. Jeho změnu vypočítáme, když si uvědomíme, že ledová i vodní koule musí mít stejnou hmotnost.

$$m_\mathrm{L} = m_\mathrm{V}\,,$$
$$\tfrac{4}{3}\pi r_\mathrm{L}^3 \varrho_\mathrm{L} = \tfrac{4}{3}\pi r_\mathrm{V}^3 \varrho_\mathrm{V}\,,$$
$$r_\mathrm{V} = r_\mathrm{L}\sqrt[3]{\frac{\varrho_\mathrm{L}}{\varrho_\mathrm{V}}}\,.$$

Pokud číselně dosadíme, vyjde $r_\mathrm{L} = 1527\,\mathrm{km}$.

Úloha 4 ... *vypařující se hrnek*

Za jak dlouho se vypaří plný hrnek vody? Hrnek má objem $V = 250\,\mathrm{ml}$ *a je umístěný zrovna v takovém prostředí, že se odpařují rovnoměrně molekuly rychlostí* $\nu = 10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$. *Výsledek udejte v hodinách.*

V hrnku je voda, která má hustotu $\varrho = 1000\,\mathrm{kgm}^{-3}$. Hmotnost vody v hrnku tedy je $m = \varrho V = 250\,\mathrm{g}$. Molární hmotnost vody je $M_{\mathrm{H_2O}} = 18\,\mathrm{g{\cdot}mol}^{-1}$. Poměr hmotnosti a molární hmotnosti udává počet molů n látky (jinak také látkové množství). Avogadrova konstanta je $N_{\mathrm{A}} = 6{,}02\cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$. Z ní pak můžeme určit počet molekul, které jsou v hrnku

$$N = N_{\mathrm{A}} n = N_{\mathrm{A}} \frac{m}{M_{\mathrm{H_2O}}} = N_{\mathrm{A}} \frac{\varrho V}{M_{\mathrm{H_2O}}}\,.$$

Dobu vypařování pak určíme vydělením počtu molekul rychlostí vypařování

$$\tau = \frac{N}{\nu} = N_{\mathrm{A}} \frac{\varrho V}{\nu M_{\mathrm{H_2O}}} \approx 2{,}3\cdot 10^{6}\,\mathrm{hod}\,,$$

což je doba, které se běžný člověk nedožije.

Úloha 5 ... *gravi-ele kyvadlo*

Jaká bude perioda malých kmitů matematického kyvadla délky l, *hmotnosti* m *s nábojem* q, *které je umístěno jak v homogenním gravitačním poli s gravitačním zrychlením* g, *tak v elektrickém poli opačného směru intenzity* E?

Řešení této úlohy je podobné jako u obyčejného gravitačního matematického kyvadla, pouze je potřeba zohlednit opačné pole elektrické. Jelikož je pouze opačně orientované, je sestavení pohybové rovnice jednoduché.

$$J\ddot{\varphi} = M\,,$$
$$ml^2\ddot{\varphi} = -\left|mg - qE\right| l \sin\varphi\,.$$

Absolutní hodnotu používáme pro případ, že by elektrické pole bylo silnější než gravitační. Provedeme standardní zjednodušení $\sin\varphi \approx \varphi$ pro malé výchylky a rovnici přepíšeme do tvaru, v jakém bychom rádi viděli rovnici pro harmonický oscilátor

$$\ddot{\varphi} + \frac{|mg - qE|}{ml}\varphi = 0\,,$$

odkud již umíme určit hodnotu periody.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{|mg - qE|}}\,.$$

Úloha 6 ... *náboje*

Dva bodové náboje Q_1 a Q_2 jsou od sebe vzdáleny $3\,\mathrm{m}$ a dohromady je jejich náboj $20\,\mu\mathrm{C}$. Zjistěte velikosti jednotlivých nábojů v situacích kdy se a) odpuzují se silou $0{,}075\,\mathrm{N}$, b) přitahují se silou $0{,}525\,\mathrm{N}$.

Úlohu budeme řešit za použití Coulombova zákona. Víme, že $Q_1+Q_2 = 20\,\mu\mathrm{C}$ a Coulombův zákon lze napsat jako

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r^2}\,.$$

Z tohoto vzorce můžeme usoudit, že $Q_1Q_2 = 75\cdot 10^{-12}\,\mathrm{C}^2$. Použijeme první rovnice pro substituci Q_2, tady dostaneme

$$Q_1(20\,\mu\mathrm{C} - Q_1) = 75\,\mu\mathrm{C}^2\,.$$

Tato rovnice má řešení

$$Q_1 = 5\,\mu\mathrm{C}\,,\qquad Q_2 = 15\,\mu\mathrm{C}\,.$$

Druhý případ se řeší obdobně, ale musíme uvažovat rozdílná znaménka nábojů, jelikož síla je přitažlivá.

$$Q_1 = 35\,\mu\mathrm{C}\,,\qquad Q_2 = -15\,\mu\mathrm{C}\,.$$

Úloha 7 ... *Slunce přibralo*

O kolik by se musela změnit rychlost oběhu Země kolem Slunce, kdyby se najednou změnila hmotnost Slunce na dvojnásobek a přitom by se Země měla pohybovat po stále stejné trajektorii (což jak víme je prakticky kružnice s poloměrem r)? Výsledek udejte v násobcích původní oběžné rychlosti v_0.

Vyjdeme z rovnosti dostředivé síly F_d a gravitační F_G

$$m\frac{v_0^2}{r} = \frac{\varkappa m M}{r^2} \quad\Rightarrow\quad v_0 = \sqrt{\frac{\varkappa M}{r}}\,,$$

kde m je hmotnost Země, M hmotnost Slunce, v_0 oběžná rychlost, $\varkappa$ gravitační konstanta a r poloměr dráhy.

Původní oběžná rychlost je tedy

$$v_0 = \sqrt{\frac{\varkappa M}{r}}$$

a po ztěžknutí Slunce

$$v_1 = \sqrt{\frac{\varkappa 2M}{r}} = \sqrt{2}v_0\,.$$

Rozdíl rychlostí tedy bude $\Delta v = v_1 - v_0 = \left(\sqrt{2}-1\right)v_0$.

Úloha 8 ... *vypuštěná koule*

Z velké hloubky pod vodou vypustíme polystyrenovou kuličku s hustotou $\varrho_\mathrm{p} = 100\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ a poloměrem $R = 5\,\mathrm{cm}$. Do jaké výšky nad hladinu vody pak vyskočí? Zanedbejte odpor vzduchu, ale pro odpor ve vodním prostředí využijte Newtonův vztah pro odporovou sílu $F_\mathrm{N} = 1/2C\varrho S v^2$, kde C je pro kouli zhruba 0,5, ϱ je hustota prostředí, S je průřez pohybujícího se tělesa a v jeho rychlost.

Při vypuštění z velké hloubky bude kulička zrychlovat do té doby, než se vztlaková síla vyrovná tíhovou a odporovou. Pro odporovou sílu použijeme Newtonův vzorec a pro vztlakovou Archimédův zákon.

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{vz}} &= F_{\mathrm{o}} + F_{\mathrm{g}}\,,\\ V\varrho_{\mathrm{v}}g &= \tfrac{1}{2}SC\varrho_{\mathrm{v}}v^2 + V\varrho_{\mathrm{p}}g\,,\\ v^2 &= \frac{2Vg(\varrho_{\mathrm{v}} - \varrho_{\mathrm{p}}}{CS\varrho_{\mathrm{v}}}\,. \end{aligned}$$

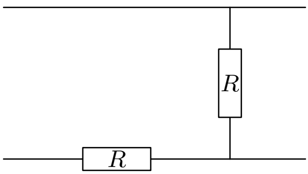
Výšku, do které kulička vyskočí, spočítáme porovnáním kinetické a maximální potenciální energie. Dosadíme již spočítané v^2 a upravíme, abychom mohli dosadit hodnoty ze zadání.

$$\begin{aligned} mgh &= \tfrac{1}{2}mv^2\,,\\ h &= \frac{v^2}{2g} = \frac{V(\varrho_{\mathrm{v}} - \varrho_{\mathrm{p}})}{CS\varrho_{\mathrm{v}}} = \frac{4R(\varrho_{\mathrm{v}} - \varrho_{\mathrm{p}})}{3C\varrho_{\mathrm{v}}}\,. \end{aligned}$$

Po dosazení číselných hodnot vyjde $h = 12\,\mathrm{cm}$.

Úloha 9 ... *black box*

Mějme neprůhlednou krabičku, ze které koukají čtyři dráty. Jestliže k první dvojici drátů připojíme baterii o elektromotorickém napětí U, mezi druhou dvojicí drátů měříme voltmetrem napětí $U/2$. Jestliže tu samou baterii připojíme ke druhé dvojici, mezi první dvojicí měříme stejným voltmetrem napětí U. Obvod uvnitř skříňky může obsahovat pouze odpory, kondenzátory a cívky. Jak vypadá obvod s nejméně prvky, který splní požadované vlastnosti?



Obr. 2. Správné zapojení

Za pomoci vztahů pro odpor sériově resp. paralelně zapojených rezistorů lehce ověříme, že zapojení na obrázku úlohu splňuje.

Úloha 10 ... *vzduchovka reloaded*

Střelíme (vodorovně) vzduchovkou do krabičky hmotnosti $M = 50\,\mathrm{g}$, která je (volně, v klidu) zavěšená na nehmotném vlákně délky $l = 1\,\mathrm{m}$. Vystřelená diabolka má hmotnost $m = 1\,\mathrm{g}$. Předpokládejme, že se střela v krabičce zastaví a dojde k dokonale nepružné srážce. Jakou rychlostí by teoreticky musela být diabolka vystřelena, aby se krabička začala pohybovat po kružnici?

Nejprve zjistíme, jakou rychlost musí musí mít závěs (o hmotnosti $M + m$, protože střela v krabičce uvízne) v nejvyšším bodě dráhy. U toho vyjdeme z logického předpokladu, že dostředivá síla musí být větší než tíhová.

$$F_{\mathrm{g}} < F_{\mathrm{d}}$$

$$(m+M)\,g < (m+M)\,\frac{v^2}{l}$$
$$v > \sqrt{gl}$$

To odpovídá energii $E_1 = (m+M)gl/2$. Aby vystoupala krabička do této výšky musela mít kinetickou energii ještě vyšší o energii odpovídající rozdílu výšek $E_\mathrm{p} = 2\,(m+M)\,gl$. Celková kinetická energie, kterou po vstřelení náboje krabička získala je tedy minimálně $E = E_1 + E_\mathrm{p} = \frac{5}{2}\,(m+M)\,gl$. Energie se ovšem v průběhu nepružné srážky nezachovává – proto vypočteme rychlost v_0 odpovídající této minimální energii a tu pak využijeme v rovnici pro zachování hybnosti pro výpočet původní rychlosti střely u_min

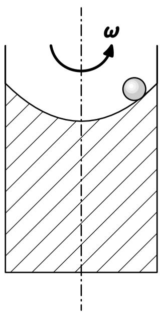
$$E = \frac{5}{2}\,(m+M)\,gl = \frac{1}{2}\,(m+M)\,v_0^2\,,$$
$$v_0 = \sqrt{5gl}\,,$$
$$mu_\mathrm{min} = (m+M)\,v_0\,,$$
$$u_\mathrm{min} = \frac{m+M}{m}\sqrt{5gl}\,.$$

Minimální rychlost, kterou musela diabolka mít, je $u_\mathrm{min} \doteq 360\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

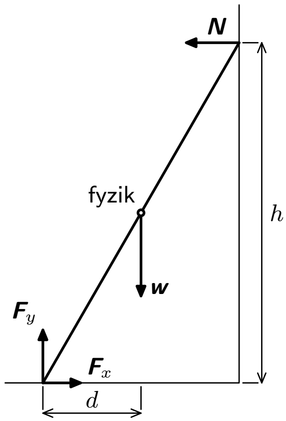
Úloha 11 ... *odstředivka*

Kde se ustálí kulička vůči vodě, pokud roztočíme odstředivku z obrázku 3?

Na kuličku stejně jako na každou molekulu vody působí jednak gravitační síla, jednak neinerciální síly (odstředivá, Corriolisova a Eulerova). Hladina vody tvoří ekvipotenciálu vůči odstředivce, proto kulička nebude mít žádnou stabilní polohu.



Obr. 3. Odstředivka



Obr. 4. Síly působící na žebřík

Úloha 12 ... *žebřík navždy*

Lehký žebřík je opřený o hladkou zeď, které se dotýká ve výšce h. Spodní strana žebříku je opřená o hrubou podlahu, jež má koeficient statického tření μ. Odvážný fyzik se rozhodne vylézt na žebřík a leze a leze až do momentu, kdy žebřík začne klouzat. Jaká je horizontální vzdálenost, kterou fyzik ulezl?

Síly, které na žebřík působí, jsou zakresleny v obr. 4. „Už už klouzat“ znamená

$$F_x = F_{x(\max)} = \mu F_y\,.$$

Pro rovnováhu bude platit, že součet všech sil ve směru y bude nulový. Tedy

$$F_y - w = 0\,.$$

Stejně pro směr x

$$F_x - N = 0\,.$$

S použitím předchozích rovnic pak můžeme napsat

$$\mu = \frac{F_x}{F_y} = \frac{N}{w}$$

Popišme konečně situaci u spodníko konce žebříku

$$\frac{N}{w} = \frac{d}{h} \quad \Rightarrow \quad d = \mu h\,.$$

Úloha 13 ... *neduhová*

V Youngově dvouštěrbinovém experimentu máme štěrbiny od sebe vzdálené 2 mm *a osvětlujeme je světlem smíseným ze dvou vlnových délek,* $\lambda_1 = 750\,\mathrm{nm}$ *a* $\lambda_2 = 900\,\mathrm{nm}$. *Ve vzdálenosti* 2 m *je umístěno stínítko. Na stínítku se nám zobrazuje interferenční obraz pro obě dané vlnové délky. V jaké vzdálenosti od nultého maxima bude první překryv interferenčních maxim daných vlnových délek?*

Použijeme známé vzorce pro interferenci. D je vzdálenost stínítka, λ je vlnová délka, m je řád maxima a d je vzdálenost štěrbin. Potom

$$y_m = m\frac{D\lambda}{d}\,, \tag{1}$$

kde y_m je vzdálenost m–tého maxima od nultého. Toto si vyjádříme pro obě vlnové délky. Dále

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{6}{5}\,.$$

Tento poměr nám říká, která maxima máme použít. Pro čárkované vlnové délky použijeme páté maximum a pro nečárkované šesté. Po dosazení příslušných hodnot m do vzorce (1), získáme výsledek

$$Y = m_1\frac{D\lambda_1}{d} = m_2\frac{D\lambda_2}{d} = 4{,}5\,\mathrm{mm}\,.$$

Úloha 14 ... *dělo*

Vypočtěte tlak v hlavni děla, které má délku $L = 18{,}405\,\mathrm{m}$, ráži $D = 380\,\mathrm{mm}$, úsťovou rychlost $v = 820\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a hmotnost náboje $m = 800\,\mathrm{kg}$. Uvažujte izobarické hoření nálože.

Protože nálož hoří izobaricky, bude se náboj pohybovat s konstatním zrychlením. Proto pro zrychlení platí

$$a = \frac{v^2}{2L}\,.$$

Pro tlak platí $p = F/S$, dosadíme-li za zrychlení dostáváme

$$p = \frac{2Mv^2}{\pi LD^2} \approx 129\,\mathrm{MPa}\,.$$

Úloha 15 ... *brzdíme*

Pomalý neutron se v látce zpomaluje pružnými srážkami. Jakou část své kinetické energie ztratí po srážce s jádrem kyslíku, pokud se rozptýlí dozadu?

Využijeme zákonu zachování hybnosti a energie. Pro jednoduchost budeme uvažovat hmotnost nukleonu rovnu jedné. Platí

$$v = 16V - v'\,, \tag{2}$$

$$\tfrac{1}{2}v^2 = \tfrac{1}{2}16V^2 + \tfrac{1}{2}v'^2\,, \tag{3}$$

kde jsme označili v původní rychlost neutronu, v' jeho rychlost po odrazu a V rychlost odraženého jádra kyslíku. Dosaďme z rovnice (2) V do rovnice (3) a vyjádřeme v'.

$$\begin{aligned} 16v^2 &= (v+v')^2 + 16v'^2\,,\\ 0 &= 17v'^2 + 2vv' - 15v^2\,,\\ v' &= v\frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4\cdot 17\cdot 15}}{2\cdot 17} = \frac{15}{17} \approx 0{,}882v\,. \end{aligned}$$

Pro energetickou ztrátu platí

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta v^2}{v^2} = \frac{64}{289} \approx 0{,}221\,.$$

Úloha 16 ... *matfyzácký tělocvik*

Předpokládejte, že podlaha (resp. schody) učebny ve které se nacházíte mají sklon $\alpha = 20^\circ$ vůči rovné podlaze venku (jinak řečeno předpokládejte, že podlaha učebny je nakloněná rovina). Stoupnete si do horní části učebny a chcete hodit kámen směrem k tabuli, nicméně jste natolik vysláblí, že nemáte šanci tam dohodit. Rozhodnete se tedy, že ho alespoň dohodíte co nejdále. Pod jakým úhlem vůči podlaze před učebnou musíte kámen hodit?

Pro šikmý vrh platí známé vztahy

$$\begin{aligned} x &= vt\cos\beta\,,\\ y &= vt\sin\beta - \tfrac{1}{2}gt^2\,, \end{aligned}$$

kde β je úhel, pod kterým je kámen vržen. Vyjádřením t z první rovnice a dosazením do rovnice druhé dostáváme

$$y = x \operatorname{tg} \beta - \frac{gx^2}{2v^2 \cos \beta^2} \,.$$

Pro y složku bodu dopadu bude platit $y = -x \operatorname{tg} \alpha$. Dosazením do předchozí rovnice a využitím různých trigonometrických vztahů dostáváme

$$x = \frac{2v^2}{g} (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \cos^2 \beta = \frac{v^2}{g} \left(\frac{\sin(\alpha + 2\beta)}{\cos \alpha} \operatorname{tg} \alpha \right) ,$$

z čehož vidíme, že x je maximální, pokud $\alpha + 2\beta = \pi/2$. Dosazením dostaneme, že $\beta = 35°$.

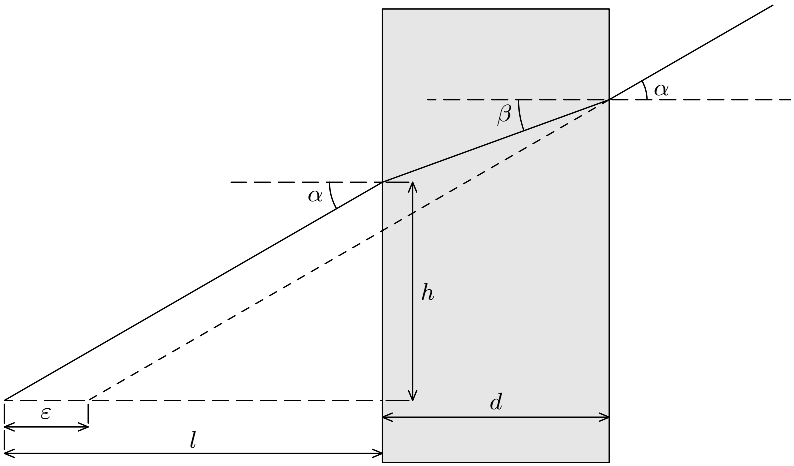
Úloha 17 ... *brýle na hovno*

O kolik se nám předměty jeví blíže/dále, díváme-li se na ně skrz ploché sklo tloušťky d pod úhlem α? (Úhel α je úhel pod kterým paprsky vcházejí do skla.)

Na obou rozhraních platí Snellův zákon

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n \,.$$

Dále z obrázku pro pravoúhlé trojúhelníky platí



Obr. 5. Lom světla

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{l} = \frac{h + d \operatorname{tg} \beta}{l + d - \varepsilon} \,,$$

kde značení odpovídá obrázku. Z těchto vztahů vzjádříme ε. Použijeme vztahu $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$

$$\varepsilon = d \left(1 - \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} \right) .$$

Úloha 18 ... *nabitá kapička*

Mezi vodorovnými deskami kondenzátoru o kapacitě $100\,\mathrm{pF}$ *nabitého napětím* $4000\,\mathrm{V}$ *se volně vznáší kapička oleje o průměru* $7{,}72\,\mu\mathrm{m}$. *Hustota oleje je* $920\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ *a plocha desek* $1\,\mathrm{dm^2}$. *Zajímá nás náboj na deskách a počet elementárních nábojů na kapičce.*

Vzhledem k tomu, že je kapička nabitá a v tíhovém poli, působí na ni dvě síly – elektrická a tíhová. Protože se má volně vznášet, musejí tyto síly působit proti sobě a býti stejně velké. Musí platit

$$F_\mathrm{e} = F_\mathrm{G}\,.$$

Nyní určíme velikosti obou těchto sil. Kapička má tvar koule, a proto ze znalosti jejího průměru D učíme hmotnost. Tíhová síla tudíž je

$$F_G = mg = \tfrac{1}{6}\pi g D^3 \varrho\,.$$

Pro kondenzátor platí

$$Q = UC = 0{,}4\,\mu\mathrm{C}\,.$$

Elektrická síla je určena velikostí náboje, který kapička nese. Ten je násobkem elementárního náboje e. Zajímá nás, kolik elektronů kapička nese, nebo jí přebývá. Sílu působící na náboj $q = ne$ vypočteme podle vztahu

$$F_\mathrm{e} = \frac{neU}{d}\,,$$

kde U je napětí na deskách a d jejich vzdálenost. Tu zjistíme z technické rovnosti

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}\,.$$

Dosazením získáme finální vztah

$$F_\mathrm{e} = \frac{neUC}{\varepsilon_0 S}\,.$$

Porovnáním obou sil zjistíme počet elementárních nábojů na kapičce. Číselný výsledek je nutno zaokrouhlit na celé číslo, neboť elementární náboj je již dále nedělitelný.

$$n = \frac{1}{6}\pi g D^3 \varrho \frac{\varepsilon_0 S}{eUC} = 3\,.$$

Úloha 19 ... *nikdo není dokonalý*

Pája si postavil deskový kondenzátor složený ze dvou kruhových vodivých desek o poloměru $R = (10{,}0 \pm 0{,}1)\,\mathrm{cm}$ *v přesném zákrytu, oddělených vzduchovou vrstvou tloušťky* $t = (5{,}00 \pm 0{,}05)\,\mathrm{mm}$. *S jak velkou relativní chybou může spočítat kapacitu tohoto kondenzátoru, jestliže permitivitu vzduchové vrstvy zná přesně?*

Kapacita C popsaného kondenzátoru je určena vztahem

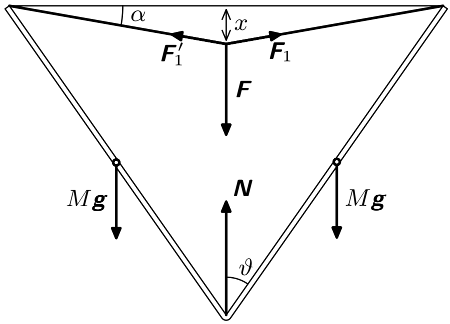
$$C = \varepsilon \frac{S}{t} = \varepsilon \frac{\pi R^2}{t}\,,$$

relativní chyba meření poloměru je $\varrho_R = 0,1/10,0 = 1\%$, relativní chyba měření vzdálenosti desek čili tloušťky vzduchové vrstvy je $\varrho_t = 0,05/5,00 = 1\,\%$ Jelikož relativní chyby veličin v součinu či podílu jsou s rezervou menší než $5\,\%$, můžeme pro výslednou rel. chybu uplatnit zákon o sčítání malých relativních chyb, tedy relativní chyba výsledku je

$$\varrho_C = \varrho_t + 2\varrho_R = 3\,\%\,.$$

Úloha 20 ... *podivuhodná trampolína*

Trampolína na obrázku se skládá ze dvou desek hmotnosti M výšky L spojených s důmyslným mechanismem, který zaručuje stejnou odchylku obou desek od svislého směru v každý okamžik. Tyto desky jsou spojeny nepružnou membránou. Jak závisí síla potřebná k prohnutí membrány na úhlu odchylky desek od svislého směru ϑ a úhlu prohnutí trampolíny α? (Nevyčíslujte závislost α na ϑ.)



Obr. 6. Trampolína – nákres sil

Zjistěme nejdříve jakou silou bude napínána membrána. Z rozkladu sil vyplývá

$$F_1 \cos \alpha = \tfrac{1}{2} F\,.$$

Dále víme, že desky jsou v klidu, proto moment sil na ně působících je roven nule např. vzhledem k ose otáčení desek. Napíšeme proto zákon rovnosti momentů sil

$$F_1 L \cos(\alpha + \vartheta) = \tfrac{1}{2} M g L \sin \vartheta\,.$$

Vyjádříme-li z výrazů výše F dostáváme

$$F = Mg \frac{\sin \vartheta \sin \alpha}{\cos(\alpha + \vartheta)}\,.$$

Úloha 21 ... *měříme Planckovu konstantu*

Zkoumáme-li voltampérovou charakteristiku určité vakuové fotonky, zjistíme, že při osvětlení fotokatody zářením o vlnové délce $\lambda_1 = 567\,\mathrm{nm}$ se objeví fotoproud při velikosti brzdného napětí $U_1 = 0{,}30\,\mathrm{V}$. Pro vlnovou délku $\lambda_2 = 365\,\mathrm{nm}$ začne fotoproud narůstat při velikosti brzdného napětí $U_2 = 1{,}45\,\mathrm{V}$. Z uvedených hodnot určete experimentální hodnotu Planckovy konstanty v hlavní jednotce SI (postačí střední hodnota na tři platné číslice, chybu zde není třeba odhadovat).

Použijeme Einsteinovu rovnici pro vnější fotoefekt, která vyjadřuje zákon zachování energie

$$hf(U) = W + T(U)\,,$$

kde h je hledaná Planckova konstanta, W je výstupní práce, frekvenci záření spočítáme přes rychlost světla ve vakuu $c = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ jako $f = c/\lambda$ a konečně kinetickou energii $T(U)$ zde přímo určíme z velikosti brzného napětí U podle vztahu $T(U) = eU$, kde $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ je velikost náboje elektronu. Po dosazení vztahů dostaneme

$$h \frac{c}{\lambda} = W + eU\,,$$

po dosazení zadaných hodnot, řešení soustavy rovnic a vyloučení W obdržíme

$$h = \frac{e}{c} \frac{U_1 - U_2}{\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}}\,.$$

Zbývá jen správně převést jednotky a počítat se semilogaritmickými tvary zápisu čísel. Navíc bychom zjistili, že měření je zatíženo systematickou chybou asi 5 %.

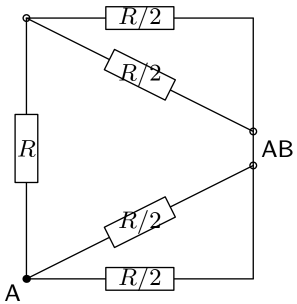
Úloha 22 ... *osmistěnka*

Jaký je odpor mezi sousedními vrcholy drátěného pravidelného osmistěnu, má-li každá hrana odpor R?

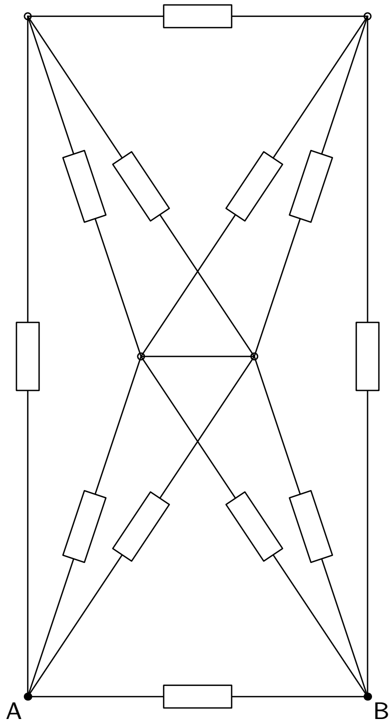
Je více možností, jak se k odporu dostat pomocí zjednodušování obvodů či pomocí rovnic. V tomto řešení zvolíme metodu co nejefektivnějšího zjednodušování.

Nejprve si schéma dvanácti odporů odpovídající hranám osmistěnu překreslíme jako na obrázku 7.

Jak je vidět, tak oba uzly uprostřed schématu jsou vůči bodům A a B na stejném potenciálu a proto si je můžeme ve schématu spojit vodivým spojením (což je na obrázku provedeno). Tím se automaticky zbavíme čtyř rezistorů, protože je vidět, že jsou zde 4 skupiny po dvou rezistorech zapojeny paralelně a můžeme je vždy nahradit odporem $R/2$. Dalším krokem je „rozpůlení“ schématu a zjišťování odporu náležejícího pouze polovině sítě.



Obr. 8. Část obvodu



Obr. 7. Rozkreslení osmistěnu

Vycházíme z toho, že když rozpůlíme spodní a vrchní odpor na dva poloviční, tak je vidět zřejmé místo v každé větvi mezi A a B, kde je stejný potenciál odpovídající průměrné hodnotě potenciálu v A a B. Určeme tedy odpor mezi A a středem AB (stačí nám na to už jenom umět počítat paralelní a sériové zapojení odporů)

$$R_{\mathsf{A-AB}} = \left(\frac{2}{R} + \frac{2}{R} + \left(R + \left(\frac{2}{R} + \frac{2}{R}\right)^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{R} + \frac{2}{R} + \frac{4}{5R}\right)^{-1} = \frac{5}{24}R\,.$$

Vypočetli jsme odpor $R_{\mathsf{A-AB}}$, stejný odpor bude mezi AB a B. Celkový hledaný odpor osmistěnu tedy je

$$R_{\mathsf{A\,B}} = \frac{5}{12}R\,.$$

Úloha 23 ... *čekání na mičudu*

Děcka si kopala míčem u rybníku tak dlouhou, až jim míč spadl do vody. Míč byl v průměru z poloviny ponořený, nicméně také kmital s velice malou výchylkou. Zatímco děti čekaly, až míč dopluje na břeh, změřily frekvenci těchto oscilací a rozhodly se dopočítat poloměr míče. Jestliže naměřily frekvenci $f = 1{,}8\,\mathrm{Hz}$, jaký jim vyšel poloměr?

Vzhledem k malé výchylce můžeme objem, který se při tomto vychýlení ponoří zapsat jako $\pi r^2 x$, kde x je výchylka z rovnovážné polohy. Užijeme-li Archimédova zákona pak můžeme psát pohybovou rovnici

$$-\pi r^2 x g \varrho_\mathrm{v} = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \varrho_\mathrm{m} a\,,$$

kde a je vertikální zrychlení míče, ϱ_v je hustota vody a ϱ_m je hustota míče. Míč musí mít poloviční hustotu, než voda, protože je z poloviny ponořený. Jde o rovnici harmonických kmitů s frekvencí

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi r^2 x g \varrho_\mathrm{v}}{\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_\mathrm{m}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3g}{2r}}\,.$$

Z toho již snadno odvodíme

$$r = \frac{3g}{8\pi^2 f^2} = 11{,}7\,\mathrm{cm}\,.$$

Úloha 24 ... *dutohlav*

Jaký je moment setrvačnosti duté koule s hustotou ϱ, vnitřním poloměrem r a vnějším poloměrem R, která rotuje kolem svého vnějšího okraje? (tj. kolem osy vzdálené R od těžiště)

Pro moment setrvačnosti plné koule vzhledem k ose procházející jejím těžištěm dle tabulek platí

$$J_\mathrm{K} = \frac{2}{5} m r^2\,,$$

kde m je její hmotnost a r je její poloměr. Pro hmotnost koule platí

$$m = \varrho V = \frac{4}{3}\pi \varrho r^3\,,$$

kde ϱ značí hustotu koule a V její objem. Tento vzorec dosadíme do momentu setrvačnosti

$$J_\mathrm{K} = \frac{8}{15}\pi \varrho r^5\,.$$

Moment setrvačnosti duté koule pak můžeme spočítat superpozicí, protože moment setrvačnosti je aditivní. To znamená, že můžeme sečíst moment setrvačnosti koule s kladnou hustotou ϱ a poloměrem R a se zápornou hustotou $-\varrho$ a poloměrem r a získáme moment setrvačnosti celé duté koule.

$$J = J_R - J_r = \tfrac{8}{15}\pi \varrho \left(R^5 - r^5\right)\,.$$

Moment setrvačnosti vůči ose neprocházející těžištěm koule pak získáme pomocí Steinerovy věty

$$J_\mathrm{celk} = J + M R^2\,.$$

Pro hmotnost duté koule platí

$$M = \tfrac{4}{3}\pi \varrho \left(R^3 - r^3\right)\,.$$

Moment setrvačnosti pak je

$$J_{\mathrm{celk}} = \tfrac{8}{15}\pi\varrho R^5 - \tfrac{8}{15}\pi\varrho r^5 + \tfrac{4}{3}\pi\varrho R^5 - \tfrac{4}{3}\pi\varrho r^3 R^2 = \tfrac{28}{15}\pi\varrho R^5 - \tfrac{4}{3}\pi\varrho r^3 R^2 - \tfrac{8}{15}\pi\varrho r^5 =$$
$$= \pi\varrho\left(\tfrac{28}{15}R^5 - \tfrac{4}{3}r^3 R^2 - \tfrac{8}{15}r^5\right) .$$

Úloha 25 ... *kosmická loď reloaded*

Uvažujme dokonale odrazivou kosmickou loď krychlového tvaru s hranou délky $b = 100\,\mathrm{m}$, hmotnosti M, orientovanou jednou ze svých stěn ke Slunci. Jak bude záviset zrychlení lodi a na její malé radiální rychlosti v a vzdálenosti R od Slunce? Velkoryse zanedbejte hmotnost Slunce. Solární konstanta je $P_0 = 1440\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$.

Loď je „poháněna“ fotony, pro něž platí

$$|\boldsymbol{p}| = \frac{E}{c} .$$

Určeme nejdříve výkon záření dopadajícího na loď, pro něj platí

$$P = P_0 \frac{\mathrm{AU}^2}{R^2} b^2 .$$

Rychlost změny hybnosti, tj. působící síla dopadajícího záření je

$$F_0 = P_0 \frac{\mathrm{AU}^2}{R^2} \frac{2b^2}{c} .$$

Protože se však loď pohybuje rychlostí v je hybnost slunečního záření zmenšena vlivem Dopplerova posuvu. Pro malé rychlosti můžeme pro výsledné zrychlení psát

$$a = P_0 \frac{\mathrm{AU}^2}{R^2} \frac{2b^2}{Mc} \left(1 - \frac{v}{c}\right) .$$

Úloha 26 ... *koule pod zemí*

Mějme dokonale kulatou homogenní Zemi (s konstantní hustotou). Vykopeme díru a místo pozemské látky zakopeme těsně pod povrch Země kouli o poloměru $r = 1\,\mathrm{km}$ z platiny ($\varrho_{\mathrm{Pt}} = 21400\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$), kterou jsme vzali z mimozemské látky a přebytečnou zemskou látku, kterou jsme vykopali zahodíme do nekonečna za mimozemšťany. Jak se změní gravitační zrychlení působící na malé těleso těsně nad zakopanou koulí na zemském povrchu? Průměrná hustota Země je $\varrho_{\mathrm{Z}} = 5520\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Gravitační konstanta je $\varkappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{kg^{-1}{\cdot}m^3{\cdot}s^{-2}}$.

Gravitační působení homogenní koule je ekvivalentní gravitačnímu působení hmotného bodu umístěnému v jeho středu. Těleso na povrchu Země je malé, takže jeho rozměry zanedbáme. Další princip, který použijeme je princip superpozice - tzn. že po zakopání platinové koule bude gravitační působení na bod těsně nad ní dané působením koule se zemským poloměrem a průměrnou hustotou Země a pak koule, která má střed ve vzdálenosti r pod naším bodem, má poloměr r a její hustota je $\varrho_{\mathrm{Pt}} - \varrho_{\mathrm{Z}}$ – touto kombinací očividně dostaneme celou hmotu a tento rozklad využijeme k prakticky okamžitému určení výsledku, protože už stačí uvážit vztah pro gravitační sílu F_{G} a zrychlení a_{G} (respektive v našem případě jejich změny, které označíme ΔF_G a Δa_G, a které se vztahují právě k té kouli s rozdílem hustot, která nám v Zemi „přibyla“)

$$\Delta F_\mathrm{G} = m\,\Delta a_\mathrm{G} = \varkappa\frac{mM}{r^2}\,,$$

kde m je hmotnost našeho malého tělesa a pro M platí

$$M = (\varrho_\mathrm{Pt} - \varrho_\mathrm{Z})V = \tfrac{4}{3}\pi(\varrho_\mathrm{Pt} - \varrho_\mathrm{Z})r^3\,.$$

Výsledná hodnota tedy je

$$\Delta a_\mathrm{g} = \tfrac{4}{3}\pi\varkappa(\varrho_\mathrm{Pt} - \varrho_\mathrm{Z})r \doteq 4{,}4\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Úloha 27 ... *klouzačka*

Nakloněná rovina o sklonu 30° leží na horizontální dokonale hladké desce. Položíme na ni kostičku a necháme jí sklouznout. Předpokládejte, že povrch nakloněné roviny je také dokonale hladký. Jestliže je kostička desetkrát lehčí, než daná nakloněná rovina, určete, jaké je zrychlení nakloněné roviny v okamžiku, kdy po ní kostička klouže.

Označme hmotnost kostičky m a hmotnost nakloněné roviny M. Úhel sklonu nakloněné roviny označme α, normálovou sílu, kterou působí nakloněná rovina na kostičku N, zrychlení kostičky vůči nakloněné rovině a a zrychlení nakloněné roviny A. Jestliže si nakreslíte obrázek nebo si soustavu představíte, můžete se lehce přesvědčit, že pohybové rovnice pro tuto soustavu jsou

$$\begin{aligned} N\sin\alpha &= MA\,,\\ mg - N\cos\alpha &= ma\sin\alpha\,,\\ N\sin\alpha &= m\left(a\cos\alpha - A\right)\,. \end{aligned}$$

Teď už jen stačí vyjádřit zrychlení

$$A = \frac{g\sin\alpha\cos\alpha}{\dfrac{M}{m} + \sin\alpha^2}\,.$$

Dosazením dostáváme $A = 0{,}41\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Úloha 28 ... *rázovitý kraj*

Máme tři stejně velké kuličky, které jsou přesně v jedné ose. První má hmotnost m a rychlost u_0 a míří na další kuličku, za kterou je třetí. Druhá a třetí mají každá hmotnost $m/2$. Jakou rychlostí se bude pohybovat prostřední kulička po všech rázech? Zanedbejte odporové síly, rotaci, rázy jsou centrální a pružné.

Rychlosti po i–té srážce značíme u první kuličky u_i, u druhé v_i a u třetí w_i. Při pružných rázech platí zákon zachování hybnosti i zákon zachování energie. Rázy řešíme po jednom – nejprve ráz první a druhé kuličky. Napišme rovnice pro tuto situaci, kdy $v_0 = 0$,

$$\begin{aligned} mu_0 &= mu_1 + \tfrac{1}{2}mv_1\,,\\ \tfrac{1}{2}mu_0^2 &= \tfrac{1}{2}mu_1^2 + \tfrac{1}{4}mv_1^2\,. \end{aligned}$$

Rovnice řešíme tak, že převedeme členy s u_1 na druhou stranu a rovnice podělíme

$$u_0 - u_1 = \tfrac{1}{2} v_1\,,$$
$$u_0^2 - u_1^2 = (u_0 - u_1)(u_0 + u_1) = \tfrac{1}{2} v_1^2$$
$$\Rightarrow \quad u_0 + u_1 = v_1\,.$$

Tento vztah dosadíme zpět do rovnice zákona zachování hybnosti a dostáváme $u_1 = \frac{1}{3}u_0$ a $v_1 = \frac{4}{3}u_0$. Druhá kulička se tedy dá do pohybu a posléze narazí do třetí kuličky. Vyjdeme ze stejných rovnic a z $w_0 = w_1 = 0$. Dostáváme rovnice

$$v_1 - v_2 = w_2\,,$$
$$v_1 + v_2 = w_2\,,$$

z čehož vyplývá $v_2 = 0$ a $w_2 = v_1 = \frac{4}{3}u_0$. Druhá kulička se zastaví a předá celou hybnost třetí kuličce. Vzhledem k tomu, že první kulička má stále rychlost ve stejném směru, dojde k opětovnému rázu první a druhé kuličky, který máme vlastně už předpočítaný. Docházíme k výsledku

$$u_3 = \tfrac{1}{3}u_2 = \tfrac{1}{3}u_1 = \tfrac{1}{9}u_0\,,$$
$$v_3 = \tfrac{4}{3}u_2 = \tfrac{4}{3}u_1 = \tfrac{4}{9}u_0\,.$$

Vzhledem k tomu, že $1/9 < 4/9 < 4/3$, tak už nedojde k žádnému dalšímu rázu. Máme vypočítané dokonce všechny rychlosti, ale stačí rychlost prostřední kuličky $v = \frac{4}{9}u_0$.

Úloha 29 ... *panďulák*

Malý panáček stojí ve vzdálenosti $a = 60\,\mathrm{cm}$ před tenkou spojkou s ohniskovou vzdáleností $f_a = 20\,\mathrm{cm}$, za kterou je po dalších $d = 10\,\mathrm{cm}$ rozptylka s ohniskovou vzdáleností $f_b = -25\,\mathrm{cm}$. V jaké vzdálenosti od původního panáčka můžeme zachytit jeho obraz? (stačí číselně) Jedná se o vzpřímený, nebo převrácený obraz?

Používáme znaménkovou konvenci z učebnice *Fyzika pro gymnázia: Optika* z nakladatelství Prometheus. Nejprve zjistíme, kam by se zobrazil panáček pouze první čočkou. Zobrazovací rovnice má tvar

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f_a}\,.$$

Pro polohu obrazu pak vychází

$$a' = \frac{a f_a}{a - f_a} = 30\,\mathrm{cm}\,.$$

Poté chceme použít zobrazovací rovnici pro druhou čočku. Ta je v podstatě stejná – jenom nahradíme písmena a písmeny b – musíme si tedy spočítat vzdálenost b od druhého rozhraní, která je v naší znaménkové konvenci $b = d - a' = -20\,\mathrm{cm}$. Poté nám již vyjde vzdálenost celkového obrazu od druhé čočky

$$b' = \frac{b f_b}{b - f_b} = 100\,\mathrm{cm}\,.$$

Obraz je pak zjevně převrácený. Můžeme si to ověřit například geometrickým náčrtem či výpočtem celkového zvětšení, které je součinem zvětšení jednotlivých zobrazení. Ukažme si výpočet zvětšení

$$Z_a = -\frac{a'}{a}\,, \quad Z_b = -\frac{b'}{b} \quad \Rightarrow \quad Z = Z_a Z_b = \frac{a'}{a}\frac{b'}{b} = -\frac{5}{2}\,.$$

Zvětšení je záporné, z čehož plyne, že obraz je skutečně převrácený. Celková vzdálenost panáčka od jeho obrazu je $D = a + d + b' = 170\,\mathrm{cm}$.

Úloha 30 ... *urychlený pozitron*

Jakým napětím U bychom měli dle klasické fyziky urychlovat pozitron, aby dosáhl rychlosti světla c? Na jakou rychlost (v násobcích c) ho tímto napětím urychlíme pak ve skutečnosti po uvážení speciální relativity?

Vyjdeme z rovnosti elektrické a kinetické energie

$$E_\mathrm{e} = eU = \tfrac{1}{2} m_\mathrm{e} v^2 = E_\mathrm{k} \quad \Rightarrow \quad U_c = \frac{m_\mathrm{e}}{2e} c^2 \doteq 260\,\mathrm{keV}\,.$$

Dle klasické mechaniky by se tedy měl pozitron urychlit napětím 260 keV na rychlost světla.

Ve skutečnosti však musíme uvážit vztahy vyplývající ze speciální teorie relativity, abychom zjistili, na jakou rychlost touto energií pozitron urychlíme. Pro celkovou energii platí $E = E_\mathrm{k} + E_0$, kde $E_0 = m_\mathrm{e} c^2$ je klidová energie pozitronu. Také platí $E = mc^2$, kde m je relativistická hmotnost, která má vztah vůči klidové energii

$$m = \gamma m_\mathrm{e} = \frac{m_\mathrm{e}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_\mathrm{e}}{\sqrt{1 - \beta^2}}\,,$$

kde γ a β jsou relativistické faktory, z nichž právě β má být řešením úlohy. Dáme rovnice dohromady a dostáváme

$$E = E_\mathrm{k} + E_0 = \frac{3}{2} m_\mathrm{e} c^2 = \frac{m_\mathrm{e} c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}\,,$$

$$\frac{9}{4}\left(1 - \beta^2\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0{,}75\,.$$

Ve skutečnosti bychom tedy pozitron urychlili na rychlost $v \approx 0{,}75c$.

Úloha 31 ... *fontánka*

Mějme malou polokouli, ve které jsou velmi hustě udělané otvory (velmi hustě znamená, že v každém bodě je otvor). Tato polokoule slouží jako fontánka, neboli z každého otvoru stříká voda rychlostí $v = 5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Určete tvar, který v prostoru vyplní tato stříkající voda.

Pro šikmý vrh platí známé vztahy

$$x = vt\cos\alpha\,,$$
$$y = vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2} g t^2\,,$$

kde α je úhel, pod kterým vystřikuje z fontánky voda. Vyjádřením t z první rovnice a dosazením do rovnice druhé dostáváme

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{g x^2}{2v^2\cos\alpha^2} = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{g x^2}{2v^2}\left(1 + \mathrm{tg}\,\alpha^2\right)\,,$$

kde jsme využili známého vztahu

$$\cos\alpha^2 = \frac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha^2}\,.$$

Voda z fontánky vyplní tu část prostoru, kam dostřelí alespoň jedna tryska. Jinými slovy bod $[x, y]$ náleží do této oblasti právě tehdy, když existuje úhel α, takový, že pro daný bod platí uvedená rovnice. To ale není nic jiného, než kvadratická rovnice v promněné $\operatorname{tg}\alpha$ a řešení existuje, právě tehdy, když je její diskriminant kladný. Dosazením do známých vztahů pro diskriminant dostáváme nerovnost

$$\frac{v^2}{2g} - \frac{g}{2v^2}x^2 \geq y\,.$$

Pokud nerovnost nahradíme rovností, dostaneme námi hledanou křivku, kterou ještě orotujeme okolo osy y, protože obal trysek z fontánky je samozřejmě dvojrozměrný povrch.

Úloha 32 ... *zběsilá kulička*

Kulička (hmotný bod) zavěšená na nehmotném pevném vlákně v prostředí bez gravitace rotuje kolem bodu upevnění vlákna ve vzdálenosti r_0, čemuž odpovídá kinetická energie E_0. Jakou práci musíme vykonat, abychom zkrátili závěs na $r = r_0/4$?

V průběhu zkracování platí zákon zachování momentu hybnosti

$$mr_0v_0 = mrv\,,$$

kde m je hmota kuličky, která se vykrátí a v_0 a v jsou rychlosti kuličky před resp. po zkrácení závěsu. Rychlost kuličky poté pak tedy bude

$$v = \frac{r_0}{r}v_0 = 4v_0\,.$$

Původní energie kuličky je zadaná a platí pro ni $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$. Pro kinetickou energii po zkrácení závěsu pak platí

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = 8mv^2 = 16E_0\,.$$

Práce námi vykonaná pak bude

$$W = E - E_0 = 15E_0\,.$$

Úloha 33 ... *bláznivá zoo*

Šílená veverka na stromě se rozhodla hodit šišku po opičce, která je na druhém stromu ve vzdálenosti $d = 10\,\mathrm{m}$ ve stejné výšce nad zemí. Protože je ale veverka neuvěřitelně šílená, tak po ní hází antigravitační šišku, která je urychlována místo zrychlením $g = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ k zemi zrychlením $-g$. Opičku tento záměr vyděsí, pustí se a začne padat volným pádem. Veverka je ovšem napojená na hyperpodprostor a vyhodí šišku přesně v okamžiku, kdy se opička pustí, bez jakéhokoliv zpoždění. Veverka je sice abnormálně šílená, ale umí házet šišky pouze rychlostí přesně $v = 8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Pod jakým úhlem α má veverka šišku hodit, aby opičku trefila? (Úhel měříme od vodorovné osy směrem dolů.)

Stromy jsou dostatečně vysoké, aby šiška zasáhla opičku v letu před dopadem. Zanedbejte odpor vzduchu a konečné rozměry zvířátek.

Směr měření úhlu byl zaveden úmyslně tak, aby přirozeně odpovídal souřadnicové ose, kde osa x směřuje od veverky k opičce a y směřuje od veverky dolů. Rozložíme si rychlost šišky do směrů souřadnicových os a ve směru y započteme i (anti)zrychlení.

$$v_x = v\cos\alpha\,, \qquad v_y = v\sin\alpha - gt\,.$$

Vzhledem k tomu, že rychlost ve směru x je konstantní a opička padá přímo dolů, pak můžeme vyjádřit čas, za který dojde ke srážce

$$d = v_x t \quad\Rightarrow\quad t = \frac{d}{v\cos\alpha}\,.$$

Za tento čas spadne opička o h níže, kterou můžeme vyjádřit jako

$$h = \tfrac{1}{2}gt^2\,.$$

Aby došlo ke srážce šišky s opičkou, pak musí být výška, do které se dostane šiška stejná. Tím se už společně s předchozími výpočty dostáváme k výsledku

$$h = \int v_y\,\mathrm{d}t = vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 \quad\Rightarrow\quad vt\sin\alpha = gt^2 \quad\Rightarrow\quad \sin\alpha = \frac{dg}{v^2\cos\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dg}{v^2} \quad\Rightarrow\quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{dg}{v^2} = \operatorname{arctg}\frac{25}{16} \doteq 57^\circ 23'\,.$$

Šílená veverka má tedy házet svou antigravitační šišku zhruba pod úhlem 57°.

Úloha 34 ... *rozbitý kondenzátor*

Mějme dvě koncentrické, nabité sféry s nábojem Q a $-Q$, které slouží jako kondenzátor. Dielektrikum mezi sférami není dokonalé a proto se kondenzátor postupně vybíjí (časovou změnu náboje na jednotlivých sférách považujte za konstantní s konstantou úměrnosti k). Dielektrikem tedy prochází proud. Nalezněte magnetické pole, které tento proud vytváří.

Úloha je sféricky symetrická, což znamená, že i vzniklé magnetické pole musí být sféricky symetrické a tedy radiální. Pokud by ale bylo nenulové, znamenalo by to, že uprostřed kondenzátoru je magnetický monopól, který v přírodě neexistuje. Takže vzniklé magnetické pole musí být nulové.

Úloha 35 ... *vada na kráse*

Theofil má doma tenkou spojnou čočku o ohniskové vzdálenosti $f_0 = 10\,\mathrm{cm}$ ze skla typu A a tenkou rozptylku ze skla typu B. Když dá čočky těsně za sebe, přesně se kompenzuje barevná vada pro vlnové délky 430 nm a 630 nm, neboli po spojení čoček je fialová a červená zaostřena přesně do stejného místa. Jaká je ohnisková vzdálenost kombinace spojky a rozptylky? Víme, že indexy lomu skel typu A a B jsou dány rovnicemi

$$n_A = 1{,}5 + 0{,}2\exp\left(\frac{400\,\mathrm{nm} - \lambda}{400\,\mathrm{nm}}\right) \quad \text{a} \quad n_B = 1{,}6 + 0{,}8\exp\left(\frac{400\,\mathrm{nm} - \lambda}{400\,\mathrm{nm}}\right)\,.$$

Z optiky víme, že pokud přiložíme dvě tenké čočky těsně za sebe, pro jejich ohniskouvou vzdálenost platí

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\,.$$

Dále víme, že pro ohniskovou vzdálenost čočky platí

$$\frac{1}{f} = (n-1)\frac{1}{r}\,,$$

kde r je parametr související s poloměry křivosti čočky. Pro ohniskouvou vzdálenost celé soustavy můžeme proto psát

$$\frac{1}{f} = (n_{A_1}-1)\frac{1}{r_A} + (n_{B_1}-1)\frac{1}{r_B}\,,$$
$$\frac{1}{f} = (n_{A_2}-1)\frac{1}{r_A} + (n_{B_2}-1)\frac{1}{r_B}\,,$$

kde r_A je křivost čočky A a r_B je křivost čočky A a n jsou odpovídající indexy lomu. Z těchto dvou rovnic vyjádříme $1/f$

$$\frac{1}{f} = \frac{(n_{A_1}-1)(n_{B_2}-1)-(n_{A_2}-1)(n_{B_1}-1)}{(n_{B_2}-n_{B_1})(n_A-1)}\frac{n_A-1}{r_A}\,.$$

poslední zlomek je původní ohnisková vzdálenost čočky a n_A značí index lomu pro střední vlnovou délku. Číselně vychází

$$f = 1{,}85 f_0\,.$$

Úloha 36 ... *odporná trivialita*

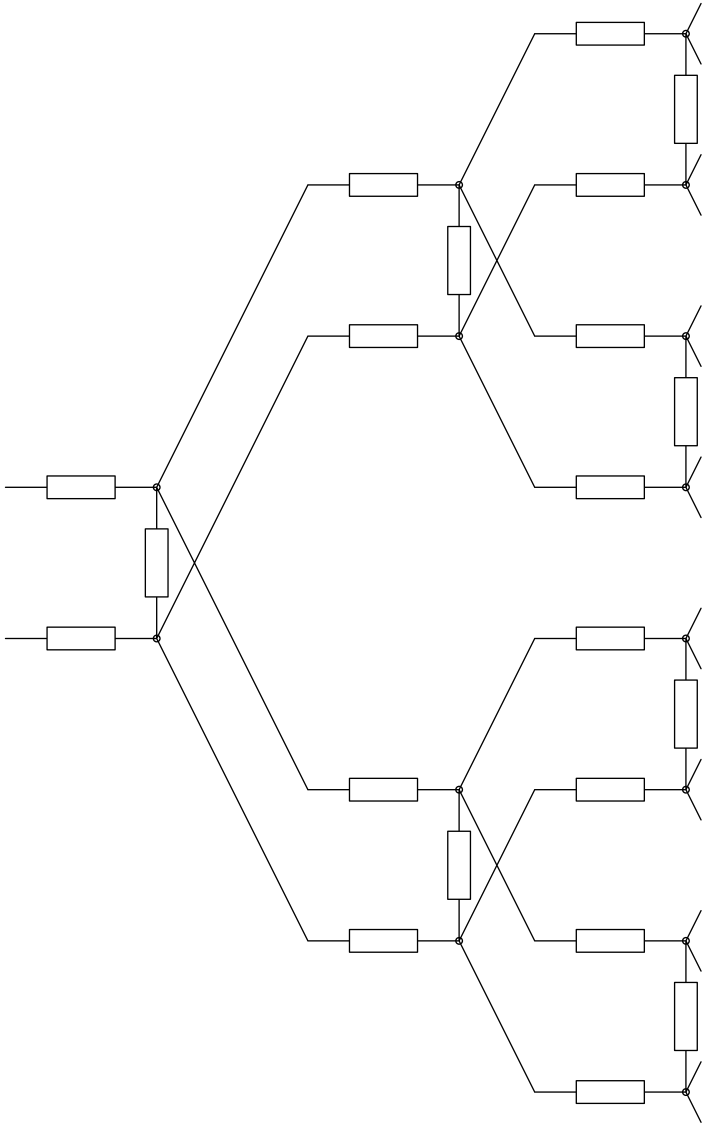
Máte jednoohmové odpory; kolik nejméně jich potřebujeme, abychom pouze sériovým nebo paralelním zapojením sestavili odpor $2,7182\ldots\,\Omega$ s přesností $1\,\%$?

V rámci uvedené přesnosti platí e $= 2+5/7$. Nicméně $5/7$ lze zapsat jako kombinaci PSSP1, kde k jednomu odporu připojujeme postupně sériově (S) a paralelně (P) další odpory.

K výsledku jsme dospěli tak, že jsme kreslili pyramidu, ve které se rozdvojí větev na sériově resp. paralelně připojený odpor (zapisujeme čísla pod sebe). Sériově připojený odpor zvětšuje odpor o jedna a paralelně zapojený odpor vytvoří výsledek, který je prostě jejich podílem. Tak najdeme číslo $5/7$ na pátém řádku. Dopočítáme, zda následující řádek nedá odpor e s přesností $1\,\%$ (přitom nemusíme počítat paralelní zapojení, která jsou menší než e, protože ta budou mít odpor ještě nižší). Žádné na šestém řádku nenalezneme, proto je optimální zapojení až na sedmém řádku, které jsme však sestrojili už na počátku.

Úloha 37 ... *nekonečně nekonečná síť*

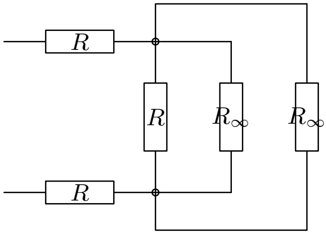
Vypočítejte celkový odpor nekonečné (a nekonečně-krát rozvětvené) odporové sítě, jejíž část vidíte na obrázku 9. Všechny odpory v síti jsou stejné a mají velikost R. Vodiče mezi odpory jsou dokonalé.



Obr. 9. Část nekonečné sítě

Postup je takový, že považujeme celkový odpor sítě za nenulový a konečný (což očividně je, protože složením odporů nemůžeme dostat zápornou hodnotu odporu a již z prvního pohledu na síť můžeme odhadnout, že celkový odpor bude mezi $2R$ a $3R$) a označíme ho R_∞. Vzhledem k tomu, že se jedná o odpor nekonečné sítě, tak pokud by se síť nevětvila, tak můžeme brát, že je stejný odpor celé sítě jako odpor jednoho určitého bloku a k němu připojené celé síti.

V našem případě je to obdobné jenomže síť musíme připojit vícekrát, aby si sítě odpovídaly. Nejjednodušší nahrazení je na obrázku 10.



Obr. 10. Rozkreslená síť

Z toho pak rovnou plyne rovnice

$$R_\infty = R + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_\infty} + \frac{1}{R_\infty}\right)^{-1} + R \quad \Rightarrow \quad R_\infty^2 - RR_\infty - 4R^2 = 0\,.$$

Tato kvadratická rovnice má dvě řešení - přičemž záporné řešení nemá fyzikální smysl. Odpor nekonečné sítě tedy je

$$R_\infty = \frac{1+\sqrt{17}}{2} R \doteq 2,562R\,.$$

Úloha 38 ... *fotíme krychli*

Fotografujeme krychli o straně a, která letí rychlostí v blízkou rychlosti světla c (označme $\beta = v/c$ relativistický faktor). Z teorie relativity vyplývá, že v naší klidové soustavě bychom změřili kontrakci přední stěny krychle ve směru pohybu o faktor $\sqrt{1-\beta^2}$. Uvidíme však i jednu boční stěnu a to dokonce tak, že celá krychle se jeví na fotografii pootočená o jistý úhel φ. Určete tento úhel.

Definujeme $\sin\varphi = \beta$. Pak se přední strana zkrátí na $a\cos\varphi$ a vypadá tedy otočená o úhel φ. Začne být vidět boční stěna. Zachycenému světlu z její zadní hrany trvá čas a/c, než se dostane na úroveň zachyceného světla z přední stěny. Proto je vidět délka $a\beta = a\sin\varphi$, takže celá krychle vypadá jako by byla pootočená.