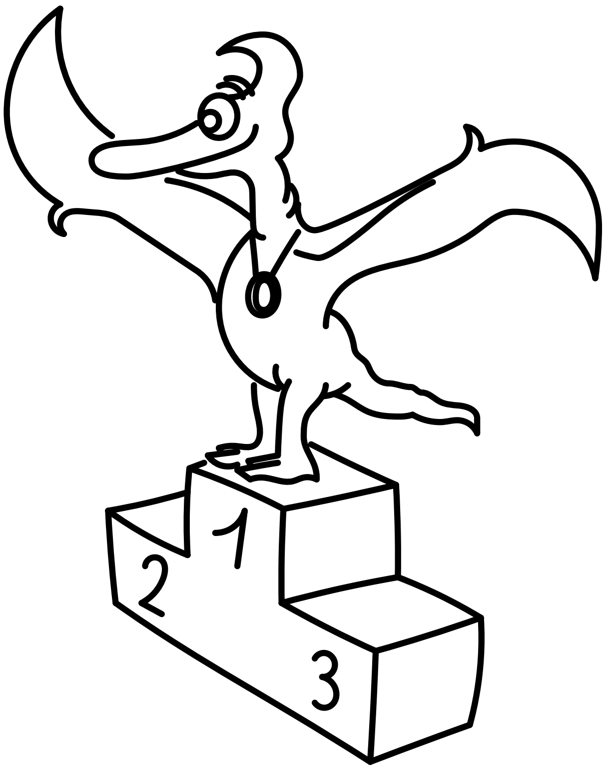
Řešení úloh 7. ročníku FYKOSího Fyziklání



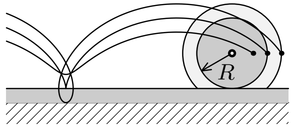
Úloha AA ... zpátečník

Která část kola se při jízdě vlaku pohybuje i v protisměru? *Organizátoři čekali na nádraží.*

Rychlost pohybu bodu na kole je dána součtem translační rychlosti středu kola a rychlosti, kterou daný bod obíhá okolo středu kola. Pro úhlovou rychlost platí

$$\omega = \frac{v}{R}\,,$$

kde v je rychlost vlaku a R je poloměr kola. Velikost oběžné rychlosti bodu ve vzdálenosti r od středu potom bude



Obr. 1: Trajektorie bodů v různé vzdálenosti od středu kola

$$w = \omega r = v\frac{r}{R}\,.$$

Je zřejmé, že bude-li bod v horní úvrati, tak má jeho rychlost w stejný směr jako v a celková rychlost je $v + w$. Naopak v dolní úvrati je oběžná rychlost opačná proti translační a výsledná rychlost je $v - w$. A proto, bude-li $r > R$, bude právě tato rychlost záporná, neboť se bude tento bod pohybovat v opačném směru, než se pohybuje vlak.

Na obrázku 1 jsou naznačeny trajektorie bodů v různých vzdálenostech od středu otáčení. Je vidět, že je-li bod od středu kola dále, než je jeho poloměr, může se během otočení pohybovat i v opačném směru než vlak.

Lukáš Ledvina
`lukasl@fykos.cz`

Úloha AB ... písky času

Přesun písku v přesýpacích hodinách je velmi komplexní záležitost, pokud se má popisovat pomocí interakcí jednotlivých zrnek. Z pozorování ale víme, že hlavními parametry, které tento jev ovlivňují, jsou hustota zrn písku ϱ, průřez otvoru S, kterým zrnka propadávají, a samozřejmě i tíhové zrychlení g. Pomocí rozměrové analýzy určete, čemu bude úměrná změna hmotnosti písku v horní části nádoby v čase $\Delta m/\Delta t$. Rozměrovou analýzou se myslí to, že máte nalézt takovou kombinaci zadaných veličin, která bude mít stejnou jednotku jako hledaná veličina.

Karel si hrál s přesýpacími hodinami.

Pokud řešíme úlohu na rozměrovou analýzu, pak si nejprve musíme uvědomit, jaké mají jednotlivé veličiny jednotky. V našem případě to je

$$[\varrho] = \mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}\,,\quad [S] = \mathrm{m^2}\,,\quad [g] = \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,,\quad \left[\frac{\Delta m}{\Delta t}\right] = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}} = \mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Dále si zadání přepíšeme do formy rovnice, kde přidělíme veličinám ϱ, S a g neznámé koeficienty do exponentů

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = C\varrho^{\alpha}S^{\beta}g^{\gamma}\,,$$

kde C je neznámá bezrozměrná konstanta, kterou s pomocí rozměrové analýzy nejsme schopni určit. Rovnici si přepíšeme do rovnosti jednotek

$$\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}} = \mathrm{kg}^{\alpha}{\cdot}\mathrm{m}^{-3\alpha+2\beta+\gamma}{\cdot}\mathrm{s}^{-2\gamma}\,.$$

Vztah musí být splněn pro každou z jednotek. Získáváme tedy tři rovnice o třech neznámých, z nichž dvě jsou velice jednoduché, protože nám vyjde rovnou hodnota neznámé

$$\alpha = 1\,, \quad -3\alpha + 2\beta + \gamma = 0\,, \quad -2\gamma = -1 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{2}\,, \quad \beta = \frac{5}{4}\,.$$

Výsledný vztah tedy je

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = C g^{\frac{1}{2}} \varrho S^{\frac{5}{4}}\,.$$

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha AC ... těžký život se vzduchem

Pokud by Země přišla o atmosféru, jak těžké závaží byste si museli položit na ramena, abyste, alespoň co se tlaku týče, nepocítili žádný rozdíl? Člověka si představte jako kvádr o rozměrech $a \times b \times c = 2\,\mathrm{m} \times 0{,}4\,\mathrm{m} \times 0{,}2\,\mathrm{m}$. Uvažujte $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ a $p = 101\,\mathrm{kPa}$.

Někdo změnil Karlovu úlohu a z lidí udělal kvádry...

Na povrchu země je atmosférický tlak $p_\mathrm{a} = 101\,\mathrm{kPa}$ a tedy síla, kterou atmosféra na člověka tlačí, je $F = bcp_\mathrm{a}$. Potřebujeme tedy najít hmotnost m, na kterou bude gravitace Země působit stejnou silou, nebo-li musí platit, že

$$bcp_\mathrm{a} = mg \quad \Rightarrow \quad m = \frac{bcp_\mathrm{a}}{g}\,,$$

kde g je tíhové zrychlení. Dosazením veličin ze zadání zjistíme, že $m = 824\,\mathrm{kg}$.

Jan Humplík
`honza@fykos.cz`

Úloha AD ... jezdkyně vysává

Internet je plný videí koček jezdících na robotických vysavačích, jiné kočky doma na robotovi vytírají podlahu. Jenže taková kočka z domácího prostředí nemá dostatečně nabroušené drápy a ty neodolají náporu více jak $100\,\mathrm{N}$. Pokud má kočka hmotnost $m = 3\,\mathrm{kg}$, jaké je maximální zrychlení cat-friendly/katzenfreundlich vysavače? *Krycí jméno Hanka.*

Na kočku na zrychlujícím vysavači působí síla $F = ma$, kde a je zrychlení vysavače. Maximální povolená síla je $100\,\mathrm{N}$, která odpovídá zrychlení $a = F/m \doteq 33\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

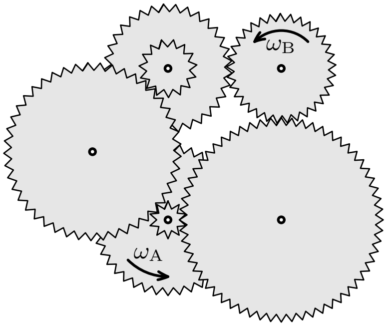
Jan Humplík
`honza@fykos.cz`

Úloha AE ... ozubená kolečka

Kolečkem A točíme ve vyznačeném směru úhlovou rychlostí ω_A. Jakou úhlovou rychlostí ω_B se bude točit kolečko B? Uvažujte, že jsou-li dvě kolečka na jedné osičce, tak jsou pevně spojena.

Dominika rýsovala ozubené kolo.

Jsou-li dvě kolečka sousedící v ozubeném soukolí, tak se každé z nich otáčí na jinou stranu (v opačném smyslu). Podíváme-li se na soukolí pořádně, zjistíme, že mezi kolečky A a B je v „pravé větvi“ jedno mezilehlé kolečko, z čehož vyplývá, že by se měla otáčet ve stejném smyslu. Ale v „levé větvi“ jsou mezilehlá kolečka dvě, a proto by se měla naše dvě studovaná kolečka otáčet v opačných smyslech. Z tohoto plyne jediný závěr: žádné kolečko v této soustavě se nemůže otáčet.



Obr. 2: Náčrtek systému ozubených koleček

Lukáš Ledvina
`lukasl@fykos.cz`

Úloha AF ... zasypaný Měsíc

Kdyby jeden mikrometeorit (těleso, které si můžeme představit zhruba jako kuličku o průměru řádově $d = 10^{-6}$ m) dopadl na každý metr čtvereční povrchu Měsíce jednou za sekundu, kolik let by trvalo pokrytí celého měsíčního povrchu do hloubky $h = 1$ m? Stačí (dobrý) řádový odhad. Uvažujte, že mikrometeority dopadají na Měsíc tak, že ho pokrývají rovnoměrně.

Karel se inspiroval v zahraniční literatuře.

Měsíc má být zasypán do hloubky jednoho metru. Vzhledem k tomu, že průměr Měsíce je zhruba 3 500 km, tak můžeme směle zanedbat změnu jeho průměru.

Ve výpočtu předpokládejme, že se mikrometeority po dopadu dokonale spojují a vytváří jednolitou vrstvu a přitom se jejich objem zachovává. Objem jednoho meteoritu je

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 \doteq 5{,}2 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{m}^3\,.$$

Objem, který se má nad jedním čtverečním metrem zaplnit, je právě jeden krychlový metr $V = 1\,\mathrm{m}^3$. Počet mikrometeoritů, který má dopadnout na jeden čtvereční metr, je tedy

$$N = \frac{V}{V_1} = \frac{6V}{\pi d^3} \doteq 1{,}9 \cdot 10^{18}\,.$$

Pokud víme, že na jeden metr čtvereční dopadá jeden mikrometeorit za sekundu, tak bude trvat zasypávání právě tento počet sekund. Stačí jenom převést sekundy na roky, jak po nás chce zadání.

$$t = N\mathrm{s} \approx 6 \cdot 10^{10}\,\mathrm{let}\,.$$

Jako správný výsledek jsme uznávali výsledky v intervalu $\left\langle 5 \cdot 10^9\,\mathrm{let}; 1 \cdot 10^{11}\,\mathrm{let}\right\rangle$, protože jsme chtěli řádový odhad a protože je diskutabilní, jakým způsobem se bude povrch plnit. V případě uvážení toho, že se jedná o dokonale tvrdé koule, které se navíc na sebe neposkládají dokonale, pak se povrch zaplní o něco dříve.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha AG ... brzdící

Řidič jedoucí v autě rychlostí $10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ se probudí z mikrospánku a zjistí, že míří přímo proti betonové stěně. Začne brzdit ve chvíli, kdy je od ní $10\,\mathrm{m}$ daleko. Jaké nejmenší maximální zrychlení mohou zažít cestující v autě? Stěnu i auto považujte za dokonale tuhé.

Janči počúval historky o autách.

Najmenšie maximálne zrýchlenie dosiahneme rovnomerne zrýchleným pohybom. Rýchlosť totiž musí klesnúť na nulu (pri zrážke zo stenou je zrýchlenie veľké) a, ak by sme mali chvíľu menšiu hodnotu spomalenia ako tú rovnomernú, tak v inom mieste dráhy by sme zase museli spomaľovať viac.

Pri počiatočnej rýchlosti v_0, vzdialenosti d, čase spomaľovania t a spomalení a platí

$$d = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a\,\left(\frac{v_0}{a}\right)^2\,,$$

odkiaľ

$$a = \frac{v_0^2}{2d} \doteq 5\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

Ján Pulmann
`janci@fykos.cz`

Úloha AH ... WiFi

Kolik fotonů vyzařovaných typickou WiFi ($f_\mathrm{W} = 2{,}4\,\mathrm{GHz}$) je potřeba k dodání stejné energie jako jedním fotonem viditelného světla o vlnové délce $\lambda_\mathrm{z} = 550\,\mathrm{nm}$?

Janči čítal o nebezpečí všadeprítomných sietí.

Energia fotónu je daná vzťahom

$$E = hf = h\frac{c}{\lambda}\,,$$

s typickým značením frekvencie f, rýchlosti svetla c, vlnovej dĺžky λ a Planckovej konštanty h. Počet fotónov je jednoducho podiel energie fotónu zeleného svetla a WiFi žiarenia

$$n = \frac{hc/\lambda_\mathrm{z}}{hf_\mathrm{W}} = \frac{c}{\lambda_\mathrm{z} f_\mathrm{W}} \doteq 227\,000\,.$$

Ján Pulmann
`janci@fykos.cz`

Úloha BA ... Peking

V Pekingu nedávno naměřili 800 µg *částic smogu na metr kubický vzduchu. Jaká hmotnost částic zůstane člověku v plicích za jeden den, pokud předpokládáme, že poměr hmotnosti usazených částic ku vdechnutým je p? Člověk za minutu prodýchá* 14 l *vzduchu. Výsledek udejte jako násobek faktoru p.* *Janči sa strachoval o svoje plúca*

Ide len o prenásobenie. Za deň predýchame $14\,\mathrm{l} \cdot 60 \cdot 24 = 20\,\mathrm{m^3}$ vzduchu. V tomto vzduchu je teda približne 16 mg častíc, a v plúcach nám ich ostane p-krát toľko.

Ján Pulmann
`janci@fykos.cz`

Úloha BB ... Tom a Jerry

Jako hrom se mají rádi Jerry a Tom, ale občas Tom pustí Jerrymu na hlavu kovadlinu. Tentokrát předpokládejme, že kovadlina váží $m = 150\,\mathrm{kg}$ a je upuštěna z výšky $h = 2\,\mathrm{m}$. Nebohý Jerry nedokáže vyvinout sílu větší než $F = 10\,\mathrm{kN}$, ale přes jeho veškerou snahu sice kovadlinu úplně zbrzdí, ta jej však zarazí do země celého. Jak je Jerry vysoký? Jerry se při takových nárazech, jak známo, vůbec nedeformuje. Velikost tíhového zrychlení můžete uvažovat $g = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Dále uvažujte, že Jerry si při vzpažení tak akorát dosáhne na vršek hlavy.
Náryho chytly kreslené seriály.

Protože víme, že kovadlina je na konci děje v klidu, musí platit, že práce tíhové síly je přesně rovna (záporné) práci myšky (Jerryho). Matematicky vyjádřeno $mhg = Fl$. Písmenem l jsme si označili hledanou výšku. Po dosazení konkrétních hodnot nám vychází $l = 0{,}3\,\mathrm{m}$. Na základě jednoduchého experimentu jsme zjistili, že Jerry je vysoký 0,3 m.

Jiří Nárožný
`nahry@fykos.cz`

Úloha BC ... dobrodružství ledové kostky

Do kádinky s vodou o poloměru 5 cm *je vhozena kostka ledu o hraně délky* 2 cm, 10 % *ledu vyčnívá nad hladinu vody, která dosahuje výšky* 25 cm. *O kolik procent se hladina vody zvýší po úplném roztátí kostky ledu? Vliv změny teploty zanedbejte.*
Kiki chce rozšířit všeobecnou antipatii k ledu.

Přestože zadaná čísla vypadají opravdu lákavě, nic se počítat nemusí. Jak by jistě potvrdil i starý dobrý Archimedes, z jeho zákona plyne, že objem ponořené části kostky ledu je právě takový, jaký by byl objem vody stejné hmotnosti, jakou má ledová kostka, takže až se z ledu tato voda skutečně stane, hladina se nijak zvyšovat nebude.

Kristína Nešporová
`kiki@fykos.cz`

Úloha BD ... tužtička

Tužka udělala během pádu ze stolu vysokého $l = 1{,}25\,\mathrm{m}$ dvě otáčky. Za předpokladu, že je po dobu celého pádu úhlová rychlost konstantní, určete její velikost. Tíhové zrychlení je $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. *Každému někdy něco spadne, i f(Aleš)ovi.*

Úhlová rychlost ω je dána vztahem

$$\omega = \frac{\varphi}{t}\,,$$

kde φ je úhel, o který se tužka otočila, tedy 4π, a t se určí ze vztahu $t = \sqrt{2l/g}$. Tedy platí

$$\omega = \sqrt{\frac{\varphi^2 g}{2l}}\,.$$

Číselně pak máme $\omega \doteq 24{,}9\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$.

Aleš Flandera
`flandera.ales@fykos.cz`

Úloha BE ... pátrání po předcích

Jak stará je kostra praprapra... dědečka ptáka FYKOSáka, pokud měl tento tvor v kostře těsně před smrtí $3{,}2\,\mathrm{kg}$ uhlíku, z čehož $10^{-6}\,\%$ tvořil uhlík ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$, a dnes obsahuje pouhých $8{,}4\cdot 10^{-11}\,\%$ zmíněného izotopu z původního množství uhlíku? Poločas rozpadu uhlíku ${}^{14}_{6}C$ je $5\,730\,\mathrm{let}$.

Kiki si vzpomněla na Cimrmanovy boty.

Pro výpočet využijeme vztahu

$$N(t) = N_0 2^{-\frac{t}{T}}\,,$$

kde $N(t)$ je nynější počet částic daného izotopu uhlíku a N_0 je původní počet částic tohoto izotopu, T je poločas rozpadu a t čas, po který se jádra rozpadala až na nynější počet. Vztah lze upravit na tvar

$$t = T\log_2\left(\frac{N_0}{N(t)}\right)\,.$$

Počet částic by se počítal podle vztahu

$$N = \frac{mN_\mathrm{A}}{M}\,,$$

kde m je hmotnost částic, M je molární hmotnost a N_A je Avogadrova konstanta. Jelikož však víme, že počty částic N_0 a $N(t)$ jsou v podílu, členy N_A/M se vzájemně zkrátí, proto do našeho vztahu stačí dosadit pouze hmotnosti daného izotopu uhlíku na začátku a nyní, které získáme jednoduše ze znalosti celkové hmotnosti uhlíku a procentuálního zastoupení tohoto izotopu. Dostaneme tedy $t = T\log_2\left(m_0/m(t)\right)$, dosadíme číselné hodnoty a získáme výsledek

$$t = 5\,730\log_2\left(\frac{3{,}2\,\mathrm{kg}\cdot 1\cdot 10^{-6}\,\%}{3{,}2\,\mathrm{kg}\cdot 8{,}4\cdot 10^{-11}\,\%}\right) \doteq 78\,000\,\mathrm{let}\,.$$

Kristína Nešporová
`kiki@fykos.cz`

Úloha BF ... kotva

Železná kotva se ve vodě jeví o 200 N *lehčí než ve vzduchu. Hustota železa je* $\varrho_{\mathrm{Fe}} = 7\,870\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, *hustota vody* $\varrho_{\mathrm{vo}} = 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, *hustota vzduchu* $\varrho_{\mathrm{vz}} = 1{,}29\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. *Jakou silou působí kotva na podložku, je-li na vzduchu?* *Dominika házela kotvy.*

Na kotvu působí vždy tíhová a vztlaková síla. Ve vzduchu na těleso působí síla $F_1 = F_G - F_{\mathrm{vz1}}$, ve vodě síla $F_2 = F_G - F_{\mathrm{vz2}}$, kde $F_{\mathrm{vz}} = V\varrho g$ je vztlaková síla, V je objem kotvy, ϱ hustota prostředí a g je tíhové zrychlení. Je zadán rozdíl těchto sil, ten pomocí uvedených vztahů vyjádříme

$$F_2 - F_1 = Vg(\varrho_{\mathrm{vo}} - \varrho_{\mathrm{vz}})\,.$$

Sílu F_1 spočítáme takto

$$F_1 = F_{\mathrm{G}} - F_{\mathrm{vz1}} = V\varrho_{\mathrm{Fe}}g - V\varrho_{\mathrm{vz}}g\,,$$

kde objem dosadíme z předchozí rovnice. Dostaneme

$$F_1 = (F_2 - F_1)\frac{\varrho_{\mathrm{Fe}} - \varrho_{\mathrm{vz}}}{\varrho_{\mathrm{vo}} - \varrho_{\mathrm{vz}}} \doteq 1\,576\,\mathrm{N}\,.$$

Kotva na vzduchu váží 1 576 N.

Dominika Kalasová
dominika@fykos.cz

Úloha BG ... home sweet home

Dominika se nesmírně těší na víkend domů za svým štěnětem, takže cestou od vlaku počítá své kroky, aby jí to rychleji uteklo. Protože by se nerada dostala do zbytečně vysokých čísel, počítá je tak, že vždy napočítá o krok víc než v předchozím případě, přičemž začíná od jedničky (čili počítá způsobem: jedna; jedna, dva; jedna, dva, tři...). Za jak dlouho se dostane domů, pokud své počítání skončí číslem 67 a nejvyšší číslo, kterého za celé počítání dosáhla, bylo 104? V rámci svého nadšení jde s rovnoměrným zrychlením $a = 0{,}002\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, *její krok je dlouhý* 70 cm *a její počáteční rychlost je* $v_0 = 4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. *Kiki myslela na Dominiku.*

Dominika celkem udělá

$$\frac{105\cdot 104}{2} + 67 = 5\,527\,\text{kroků}\,,$$

ujde tedy dráhu $s = 5527\cdot 0{,}7\,\mathrm{m} = 3868{,}9\,\mathrm{m}$. Využijeme vztahu $s = v_0 t + at^2/2$ a po vyřešení kvadratické rovnice zjistíme, že čas t byl asi 805 sekund.

Kristína Nešporová
kiki@fykos.cz

Úloha BH ... vodečka

Odhadněte, kolik molekul ethanolu je v jedné plné půllitrové láhvi vodky s 40 % *obsahem ethanolu. Tato úloha bude opravována s cca 25% tolerancí.*
Karel se inspiroval Fermiho úlohami.

Úkolem je počet molekul pouze odhadnout, a to je pro jistotu zdůrazněno i uvedením informace, že uznáváme širší rozpětí výsledných hodnot. Proto si můžeme dovolit provádět následující zanedbání, která jsou sice dost hrubá, ale pro odhad s požadovanou přesností postačují.

Není zadáno, zda-li se jedná o hmotnostní či objemový obsah ethanolu v nápoji. Proto budeme předpokládat, že se jedná o objemový podíl. V láhvi je zhruba 40 % z $V_0 = 0{,}5\,\mathrm{l}$, tedy $V = 0{,}2\,\mathrm{l}$ alkoholu (ethanolu). Nalezneme si hustotu ethanolu, která je přibližně $\varrho = 800\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Tím pádem je v lahvi $m = \varrho V = 0{,}16\,\mathrm{kg}$ ethanolu. Ethanol je chemická látka, která má funkční vzorec $\mathrm{C_2H_5OH}$. Její relativní molekulová hmotnost je tedy

$$M_{\mathrm{C_2H_5OH}} = 2A_\mathrm{C} + 6A_\mathrm{H} + A_\mathrm{O} = 2\cdot 12 + 6\cdot 1 + 1\cdot 16 = 46\,,$$

kde jednotlivé relativní atomové hmotnosti uhlíku, vodíku a kyslíku jsme si našli v tabulkách. Vzpomeneme-li si na poučku, že 1 mol obsahuje stejný počet atomů jako je v 12 g $^{12}\mathrm{C}$, pak nám ihned dojde, že 1 mol ethanolu váží $m_\mathrm{m} = 46\,\mathrm{g}$. Počet částic ethanolu v láhvi pak bude $N = N_\mathrm{A} m/m_\mathrm{m}$, kde $N_\mathrm{A} = 6{,}0\cdot 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$ je Avogadrovo číslo. Počet atomů ethanolu v jedné půllitrové láhvi vodky je zhruba $2{,}1\cdot 10^{24}$.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha CA ... křivý úsměv

Horizontální kruhová trubice průřezu S_1 s poloměrem $r_1 = 1\,\mathrm{cm}$ je v jednom místě zúžená na průřez S_2 a poloměr $r_2 = 0{,}2\,\mathrm{cm}$, odkud je svisle dolů vedená U-trubice do místa s průřezem S_1. Tato U-trubice je naplněná rtutí o hustotě $\varrho = 13\,500\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Jaký výškový rozdíl hladin rtuti Δh se v U-trubici ustálí, pokud do širší části proudí vzduch rychlostí $v_1 = 5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$? Hustota vzduchu je $\varrho_\mathrm{v} = 1{,}3\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Tíhové zrychlení uvažujte jako $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

f(Aleš)ovi připomínala rtuť v U-trubici úsměv.

V místě průřezu S_1 je vyšší tlak p_1 a proto musí tlak p_2 v místě s průřezem S_2 dorovnat tlak hydrostatický p_h. Ten je dán jako

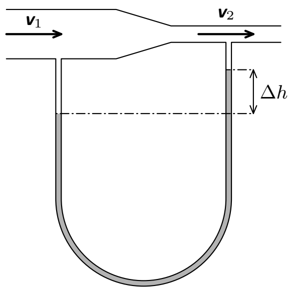
$$p_\mathrm{h} = \Delta h \varrho g\,.$$

Odtud plyne

$$\Delta h = \frac{p_1 - p_2}{\varrho g}\,.$$

Rozdíl tlaků $p_1 - p_2$ vyjádříme z Bernoulliho rovnice

$$p_1 + \frac{1}{2}\varrho_\mathrm{v} v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\varrho_\mathrm{v} v_2^2\,.$$



Obr. 3: Schéma U-trubice

Dostaneme

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\varrho_\mathrm{v}\left(v_2^2 - v_1^2\right)\,.$$

Rozdíl rychlostí pak určíme pomocí rovnice kontinuity

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

jako

$$v_1^2\frac{S_1^2}{S_2^2} - v_1^2 = v_1^2\left(\frac{\pi^2 r_1^4}{\pi^2 r_2^4} - 1\right) = v_1^2\left(\frac{r_1^4}{r_2^4} - 1\right)\,.$$

Tedy rozdíl hladin bude dán jako

$$\Delta h = \frac{\varrho_\mathrm{v} v_1^2}{2\varrho g}\left(\frac{r_1^4}{r_2^4} - 1\right) .$$

Číselně máme $\Delta h = 0{,}077\,\mathrm{m}$, tedy asi $8\,\mathrm{cm}$.

Aleš Flandera
flandera.ales@fykos.cz

Úloha CB ... chyba

Představte si, že máte za úkol změřit tíhové zrychlení tak, že budete pouštět nějaký předmět volným pádem z výšky $10\,\mathrm{m}$ *a měřit jeho dobu pádu. Jak přesně musíme změřit dobu pádu, abychom získali tíhové zrychlení s relativní chybou* $0{,}01$, *tj.* $1\,\%$*?*

Nudné experimenty od Dominiky...

Padající těleso v tíhovém poli se zrychlením g za dobu t urazí dráhu $h = 10\,\mathrm{m}$:

$$h = \frac{1}{2} g t^2 .$$

Odtud vyjádříme tíhové zrychlení, které máme měřit

$$g = \frac{2h}{t^2} .$$

Relativní chyby se při násobení i dělení sčítají, proto abychom dosáhli relativní chyby 0,01, čas musíme měřit s poloviční chybou – tj. 0,005, což je $0{,}5\,\%$.

Dominika Kalasová
dominika@fykos.cz

Úloha CC ... skokan mostní obecný

Skokan o hmotnosti $m = 70\,\mathrm{kg}$ *na bungee jumpingovém laně skočí z mostu. Po chvíli pozorujeme, jak docela pěkně harmonicky kmitá. Mezi osmi dosaženími nejnižšího bodu v rámci jeho dráhy jsme naměřili čas* $t = 36\,\mathrm{s}$. *Po jisté době se kmity utlumí a skokan zůstane viset v hloubce* $h = 28\,\mathrm{m}$ *pod mostem. Jaká je tuhost lana (analogická tuhosti pružiny) a jeho délka v nenataženém stavu?*

Karel se inspiroval internetem.

Doba, za kterou byl skokan osmkrát v nejnižším bodě, je zřejmě sedminásobek periody kmitů $t = 7T$, které budeme považovat za harmonické. Skokana si tedy představíme jako závaží o hmotnosti m na pružince o tuhosti k. Perioda harmonického oscilátoru je dána vztahem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} .$$

Vyjádříme tuhost k

$$k = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = m\left(\frac{14\pi}{t}\right)^2 \doteq 104{,}5\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}} .$$

Nyní si označme l_0 délku lana visícího bez zátěže. Tuhost pružiny k udává koeficient úměrnosti mezi výchylkou a působící silou. Protažení lana A je tedy dáno tíhovou silou skokana

$$mg = kA\,.$$

Odtud již triviálně dostaneme délku lana odečtením protažení od délky lana v zatíženém stavu h.

$$l_0 = h - A = h - \frac{mg}{k} = h - \frac{gt^2}{(14\pi)^2} \doteq 21{,}4\,\mathrm{m}\,.$$

Martin Formánek
`martin@fykos.cz`

Úloha CD ... elektrizující naviják

Na rumpál s poloměrem $R = 10\,\mathrm{cm}$ navíjíme vodivý drát rychlostí $N = 5$ závitů za sekundu. Rumpál je v homogenním magnetickém poli s magnetickou indukcí $B = 1\,\mathrm{T}$ ve směru jeho osy. Jaké napětí naměříme na koncích drátu?

Martina zaujal originální způsob indukování napětí.

Magnetický indukční tok cívkou o průřezu S s n závity je

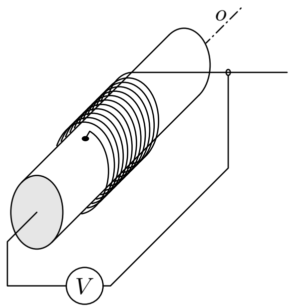
$$\Phi = nBS\,,$$

jeho časová změna pak

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{(\Delta n)BS}{\Delta t} = NBS\,,$$

za předpokladu, že $S = \pi R^2$ a B je konstantní. Tento výsledek dosadíme do Faradayova zákona

$$\mathcal{E}_F = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -NB\pi R^2\,.$$



Obr. 4: Rumpál

Pro velikost indukovaného napětí pak dostaneme číselný výsledek $\mathcal{E}_F \doteq 0{,}157\,\mathrm{V}$.

Martin Formánek
`martin@fykos.cz`

Úloha CE ... anihilační žárovka

Kolik párů proton-antiproton by muselo anihilovat za vteřinu, aby energie z anihilace mohla pohánět $100\,\mathrm{W}$ žárovku? Předpokládejte, že gama záření z anihilace se nám daří přeměňovat na elektrickou energii s účinností $\eta = 10\,\%$. Kinetickou energii částic považujte v okamžiku srážky za zanedbatelnou. *Karel se inspiroval Fermiho úlohami.*

Vyjdeme z nejznámější Einsteinovy rovnice, která dala do vztahu energii a hmotnost těles, a to

$$E = mc^2\,,$$

kde E je energie získaná anihilací částic o hmotnosti m a c je rychlost světla. V našem případě se zajímáme o anihilaci proton-antiproton. Hmotnost protonu je $m_\mathrm{p} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$. Hmotnost antiprotonu je stejná. Hmotnost anihilovaných částic celkem je tedy $m = 2m_\mathrm{p}$. Příkon žárovky $P_0 = 100\,\mathrm{W}$ je spotřebovaná energie žárovkou za jednotku času. Uvažujeme účinnost převodu energie z anihilace na elektrickou energii, proto „výkon anihilace" P musí být P_0/η. Počet párů proton-antiproton, které musí anihilovat za jednotku času, označme N. Pokud tímto počtem vynásobíme E, dostáváme potřebný výkon a po vyjádření dostáváme výsledek

$$P = \frac{P_0}{\eta} = EN \quad \Rightarrow \quad N = \frac{P_0}{\eta E} = \frac{P_0}{2\eta m_\mathrm{p} c^2} \doteq 3{,}3 \cdot 10^{12}\,.$$

Abychom poháněli jednu 100 W žárovku s 10 % účinností přeměny energie anihilací párů proton-antiproton, museli bychom anihilovat $3{,}3 \cdot 10^{12}$ takových párů za vteřinu.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha CF ... vaření vody

Dominika dala do hrnce $V = 3\,\mathrm{l}$ destilované vody. Voda měla teplotu $t_0 = 15\,^\circ\mathrm{C}$ a hustotu $\varrho_0 = 999{,}1\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Zapnula vařič a chtěla přivést vodu k varu. V okamžiku, kdy bude vypínat vařič, bude mít voda teplotu $t_1 = 100\,^\circ\mathrm{C}$ a hustotu $\varrho_1 = 958{,}4\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ Dominika chce, aby voda zabírala stejný objem jako před ohřátím, a proto nechá nějakou vodu vypařit. Můžete předpokládat, že měrná tepelná kapacita vody je při zahřívání konstantní s hodnotou $c_\mathrm{p} = 4\,180\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$. Měrné skupenské teplo varu vody je $l = 2{,}26\,\mathrm{MJ{\cdot}kg^{-1}}$. Kolik energie Dominika spotřebovala, pokud má její vařič účinnost $\eta = 75\,\%$?

Karel přemýšlel nad tím, jak to ta Dominika dělá...

Nejprve uvažujme zahřívání vody o dané hmotnosti $m = V\varrho_0$ z teploty t_0 na teplotu t_1. Při tomto procesu musíme dodat teplo

$$Q_\mathrm{c} = mc_\mathrm{p}\Delta t = V\varrho_0 c_\mathrm{p}\left(t_1 - t_0\right)\,.$$

Předpokládejme, že během zahřívání nedocházelo k vypařování a že voda se začala měnit na páru až při dosažení t_1, která je v daných podmínkách teplotou varu. Na začátku varu měla stále hmotnost $m = V\varrho_0$, ale již hustotu ϱ_1, tedy objem $V_1 = V\varrho_0/\varrho_1$. Aby se Dominika dostala na původní hodnotu objemu V, musí se odpařit voda o hmotnosti $\Delta m = \left(V_1 - V\right)\varrho_1 = V\left(\varrho_0 - \varrho_1\right)$. Na to se spotřebuje teplo

$$Q_\mathrm{l} = l\Delta m = Vl\left(\varrho_0 - \varrho_1\right)\,.$$

Nyní je Dominika spokojená, má opět 3 l vody o teplotě t_1, jak chtěla. Vařič musel systému odevzdat teplo $Q_\mathrm{out} = Q_\mathrm{c} + Q_\mathrm{l}$. Započteme-li konečně účinnost vařiče, obdržíme

$$E = \frac{Q_\mathrm{out}}{\eta} \doteq 1\,790\,\mathrm{kJ}.$$

Tereza Steinhartová ***Martin Formánek***
terkas@fykos.cz martin@fykos.cz

Úloha CG ... zaseknutá koule

Kutil Pikoš vyhloubil do skály jámu tvaru pravidelného čtyřbokého jehlanu tak, že jeho osa byla svisle a jeho protilehlé boční stěny svíraly úhel $\alpha = 30^\circ$. Do této jámy poté vložil kuličku hmotnosti $m = 250\,\mathrm{g}$ tak, že se skály dotýkala právě v jednom bodě každé stěny jehlanu. Jak velkou silou působí každá ze stěn jehlanu na kuličku? *Pikoš si hrál s kuličkami.*

Na kouli působí směrem dolů tíhová síla o velikosti mg, kde g je tíhové zrychlení. Dále na ni působí čtyři síly od skály. Tyto síly musí být kolmé na plochu styku, tedy na stěny jehlanu. Svírají-li protilehlé boční stěny jehlanu úhel α, pak každá ze stěn jehlanu svírá se svislou osou jehlanu úhel $\alpha/2$, tedy síly, kterými působí skála na kouli svírající s vodorovným směrem také úhel $\alpha/2$ (dva úhly, jejichž ramena jsou navzájem kolmá, mají stejnou velikost). Ze symetrie je zřejmé, že všechny čtyři síly, kterými skála na kouli působí, jsou stejné. Aby se koule nepohybovala, velikost výsledné síly na ni působící musí být nulová. Proto vertikální složka každé ze čtyř sil, kterými působí skála na kouli, musí mít velikost $mg/4$. Je-li velikost každé z hledaných sil F, kterou působí skála na kouli, pak platí

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{mg/4}{F} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{mg}{4\sin\frac{\alpha}{2}} \doteq 2{,}37\,\mathrm{N}\,.$$

Tomáš Pikálek
`pikos@fykos.cz`

Úloha CH ... váhavé napětí

Mějme nekonečný drát zahnutý do tvaru U ve svislé rovině. Kolmo na rovinu drátu prochází magnetické pole velikosti $B = 0{,}025\,\mathrm{T}$. Drátu se dotýká vodič dlouhý $l = 1\,\mathrm{m}$ a o hmotnosti $m = 100\,\mathrm{g}$ tak, že vytváří uzavřený obvod. Vodič má velmi velký konečný odpor a je uchycen ve středu na pružince tuhosti $k = 100\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$ a kmitá s amplitudou $A = 10\,\mathrm{cm}$. Jaká je velikost maximálního napětí vytvořeného v obvodu? *Jakub rozmýšľal nad novým generátorom.*

Poloha vodiča sa mení s časom podľa priebehu

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)\,,$$

kde ω je uhlová frekvencia kmitov, čo pre teleso s hmotnosťou m a pružinu tuhosti k je

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

Plocha obvodu sa preto časom mení. Potom plocha obvodu v závislosti od času je

$$S(t) = S_0 + lA\sin(\omega t + \varphi)\,,$$

kde S_0 je plocha obvodu v rovnovážnej polohe vodiča. So zmenou plochy obvodu prichádza zmena magnetického toku, a tým sa v obvode indukuje napätie. Magnetický tok slučkou je

$$\Phi(t) = B\left(S_0 + lA\ \sin(\omega t + \varphi)\right)\,.$$

Indukované napätie je

$$U_\mathrm{i} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}(t) = -lAB\omega\cos(\omega t + \varphi)\,.$$

Maximálne indukované napätie v obvode potom je

$$U_{\max} = lAB\sqrt{\frac{k}{m}} \doteq 79\,\mathrm{mV}\,.$$

Jakub Kocák
jakub@fykos.cz

Úloha DA ... Mercurial

Chcete si postavit teploměr ze skleněné trubičky o vnitřním průměru $d = 1\,\mathrm{mm}$ s kulovou baňkou na konci. Naplníte soustavu $V_0 = 8{,}63\,\mathrm{cm}^3$ rtuti (baňka je zcela plná a něco je i v trubičce). V jaké vzdálenosti od sebe máte vyznačit rysky pro °C? Koeficient objemové roztažnosti rtuti je $\beta = 1{,}82 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{K}^{-1}$. *Michal vykradl web University of Oregon.*

Rtuť se může rozpínat jenom v trubičce. Spočítáme tedy změnu objemu při změně teploty o $1\,\mathrm{K}$ ($= 1\,^\circ\mathrm{C}$) a spočítáme výšku válce v trubičce

$$h = \frac{\Delta V}{\pi(d/2)^2} = \frac{\beta V_0 \Delta T}{\pi(d/2)^2} \doteq 2\,\mathrm{mm}\,.$$

Michal Koutný
michal@fykos.cz

Úloha DB ... pták narcisák

Pták narcisák stojí na optické lavici, kde je také spojná čočka s ohniskovou vzdáleností $10\,\mathrm{cm}$. Jak daleko od čočky si má stoupnout, aby mu byl jeho reálný obraz co nejblíže a zároveň nestál přímo v čočce? *Dominika přemýšlela o čočkách na zkoušce z fyziky.*

Označíme si p vzdálenost ptáka od čočky a i vzdálenost jeho obrazu od čočky ($p, i > 0$ – obraz bude reálný). Vzdálenost ptáka a jeho obrazu označme L, platí

$$p + i = L\,.$$

Vyjádřeme odtud i a dosaďme do zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{L - p} = \frac{1}{f}\,.$$

Tuto rovnici roznásobíme a obdržíme kvadratickou rovnici

$$p^2 - pL + Lf = 0\,.$$

Chceme, aby vzdálenost L byla co nejmenší – hledanou hodnotu si označme L_0. Pro $L < L_0$ nemůže mít tato rovnice řešení, jinak by daná hodnota byla novým minimem. Proto pro $L = L_0$ existuje právě jedno řešení (představme si, jak vypadá vzájemná poloha paraboly a přímky $p = 0$) a podmínka minima je tedy totožná s podmínkou na nulovost diskriminantu

$$L_0^2 - 4L_0 f = 0\,.$$

Odtud $L_0 = 0$ nebo $L_0 = 4f$. První z řešení (kdy si pták stoupne těsně k čočce) je dle zadání nezajímavé a pro druhé řešení dostaneme dosazením a vyřešením kvadratické rovnice

$$p = 2f = 20\,\mathrm{cm}\,.$$

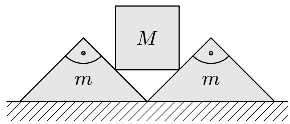
Pták se tedy musí postavit do dvojnásobku ohniskové vzdálenosti, aby mu byl jeho obraz co nejblíž. Můžeme dopočítat, že obraz bude vzdálen od čočky také $2f$, je to tedy symetrický případ. V tomto případě šlo také výsledek odhadnout z toho, že nějaká extremální situace pravděpodobně nastane v nějakém speciálním případě, třeba v případě symetrie.

Dominika Kalasová
dominika@fykos.cz

Úloha DC ... kostečky

Malý Jarda se rozhodl postavit věž z kostek, ale bohužel začal poněkud nešťastně – viz obrázek. Kostky s průřezem rovnoramenného trojúhelníku mají hmotnost m, krychle má hmotnost M a součinitel klidového tření mezi kostkami a podložkou je f. Jaké je nejvyšší možné M, aby se trojúhelníkové kostky už po přidání krychle nerozjely? Uvažujte, že kostky mezi sebou kloužou bez tření. *Martin skládal test GRE.*

Z důvodů symetrie stačí, když se budeme zabývat jen jednou trojúhelníkovou kostkou. Rozkladem tíhové síly krychle v jejím těžišti zjistíme, že na šikmou stěnu spodní trojúhelníkové kostky působí normálová síla



Obr. 5: Jardovy kostky

$$F_\mathrm{N} = \sin(45^\circ) Mg = \frac{\sqrt{2}}{2} Mg\,.$$

Opětovným rozkladem této síly, tentokrát do svislého a vodorovného směru, dostaneme

$$F_x = F_y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} Mg = \frac{1}{2} Mg\,,$$

takže celková tíhová síla, kterou působí trojúhelníková kostka na podložku, je

$$F_G = mg + F_y = \left(m + \frac{M}{2}\right) g\,.$$

Tato síla vyvolává horizontální třecí sílu

$$F_\mathrm{t} = F_G f = \left(m + \frac{M}{2}\right) gf\,,$$

která musí být větší nebo rovna horizontální síle F_x, kterou na trojúhelník tlačí krychle

$$\left(m + \frac{M}{2}\right) gf \geq \frac{1}{2} Mg\,.$$

Odtud již snadno vyjádříme M

$$M \leq m \frac{2f}{1-f}\,.$$

Martin Formánek
martin@fykos.cz

Úloha DD ... rande s fykosákem

Úspěšný řešitel FYKOSu Květoslav Citlivý sedí se svojí slečnou Kamilou v kánoi na jezeře. Květoslav váží $m_m = 80\,\mathrm{kg}$, Kamila o něco méně. Hmotnost kánoe je $m_l = 30\,\mathrm{kg}$. Květoslav s Kamilou sedí ve vzdálenosti $l = 3\,\mathrm{m}$ od sebe, ve stejné vzdálenosti od středu prázdné kánoe. Voda je klidná, kánoe je vůči ní také v klidu. Květoslav navrhne Kamile, že by si mohli vyměnit místa, aby Kamila lépe viděla na jezero. Když tak učiní, všimne si Květoslav, že kánoe se posunula o $d = 40\,\mathrm{cm}$ vzhledem ke kůlu ponořenému ve vodě. Z toho se mu podařilo vypočítat hmotnost Kamily. Kolik mu vyšlo? *Romantik Zdeněk si listoval v HRW.*

Jelikož na soustavu Květoslav-Kamila-kanoe nepůsobí žádná vnější síla, těžiště této soustavy musí setrvávat v klidu. Vyjádřeme proto těžiště soustavy před výměnou (osa x leží na spojnici Květoslav-Kamila)

$$x_\mathrm{T} = \frac{-m_\mathrm{m} l/2 + m_\mathrm{f} l/2}{m_\mathrm{m} + m_\mathrm{l} + m_\mathrm{f}}\,,$$

kde m_m je hmotnost Květoslava, m_f hmotnost Kamily, m_l hmotnost loďky a střed loďky jsme umístili do počátku souřadného systému. Polohu těžiště soustavy po výměně vyjádříme obdobně – loďka se posune o $0{,}4\,\mathrm{m}$ směrem k původní poloze Květoslava a Květoslav s Kamilou si vymění místa vzhledem k těžišti loďky

$$x_\mathrm{T} = \frac{m_\mathrm{m}(-d + l/2) - m_\mathrm{l} d + m_\mathrm{f}(-d - l/2)}{m_\mathrm{m} + m_\mathrm{l} + m_\mathrm{f}}\,.$$

Porovnáním čitatelů těchto rovnic a triviálních algebraických úpravách dostáváme pro hmotnost Kamily

$$m_\mathrm{f} = \frac{m_\mathrm{m}(l - d) - m_\mathrm{l} d}{l + d} \doteq 57{,}65\,\mathrm{kg}\,.$$

Zdeněk Jakub
zdenekjakub@fykos.cz

Úloha DE ... audiofilská

Mějme diodu připojenou ke zdroji harmonického střídavého napětí s amplitudou $U_0 = 5\,\mathrm{V}$. Prahové napětí diody je $U_\mathrm{D} = 0{,}5\,\mathrm{V}$, jinak ji považujeme za dokonale nepropustnou pro nižší a dokonale propustnou pro vyšší napětí. Vypočtěte, jakou procentuální část periody zdroje dioda pracuje, tj. kdy jí teče proud. *Janči studuje elektroniku.*

Diodou teče proud od času t, kdy poprvé platí $U_0 \sin(2\pi t/T) = U_\mathrm{D}$, do času $T/2 - t$, a po vydělení periodou dostáváme

$$\frac{T/2 - 2t}{T} = 1/2 - \frac{\arcsin(U_\mathrm{D}/U_0)}{\pi} \doteq 0{,}468 = 46{,}8\,\%\,.$$

Ján Pulmann
janci@fykos.cz

Úloha DF ... netopýří šampionát

Při netopýřím šampionátu v letu na 5 km *místní favorit neočekávaně nedokončil závod, jelikož tragicky zemřel po nárazu do sloupu. Jakou minimální rychlostí musel letět, aby tento sloup „neviděl“? Tento konkrétní netopýr se orientoval pomocí ultrazvuku o* $f = 45\,\mathrm{kHz}$*, nejvyšší frekvence, kterou byl schopen slyšet, byla* $f_h = 200\,\mathrm{kHz}$*. Počítejte s rychlostí zvuku* $v = 343\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$*.*

Zdeněk je fanoušek netopýřích závodů.

Pro Dopplerův jev platí jednoduchý obecný vztah

$$f' = f\frac{v \pm v_\mathrm{D}}{v \pm v_\mathrm{Z}}\,,$$

kde f' je frekvence měřená detektorem, v je rychlost zvuku v daném prostředí, v_D je rychlost pohybu detektoru a v_Z je rychlost pohybu zdroje zvuku. Znaménka plus/minus volíme tak, aby odpovídala fyzikální zkušenosti – když se např. zdroj pohybuje směrem k detektoru, bude se měřená frekvence zvyšovat, tedy ve jmenovateli bude minus. Když netopýr letěl rychlostí v_n, ke sloupu před ním dorazila zvuková vlna o frekvenci (pohybuje se zdroj, detektor stojí)

$$f_\mathrm{s} = f\frac{v}{v - v_\mathrm{n}}\,.$$

Od tohoto sloupu se vlna odrazila a šířila se zpět k netopýrovi. Aby byl pro netopýra sloup na hranici viditelnosti, musela tato vlna mít frekvenci f_h (pohybuje se detektor, zdroj stojí)

$$f_\mathrm{h} = f_\mathrm{s}\frac{v + v_\mathrm{n}}{v}\,.$$

Když z tohoto vztahu vyjádříme f_s, porovnáme s předchozí rovnicí a upravíme, můžeme již vyjádřit v_n pomocí známých parametrů

$$v_\mathrm{n} = v\frac{f_\mathrm{h} - f}{f_\mathrm{h} + f}\,.$$

Po dosazení vychází $v_\mathrm{n} = 217\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a my tedy můžeme předpokládat, že tento netopýr byl za favorita považován právem.

Zdeněk Jakub
zdenekjakub@fykos.cz

Úloha DG ... vlnitý elektron na baterku

Jaká by byla de Broglieho vlnová délka elektronu, který bychom urychlili z klidu napětím obyčejné baterie, tedy $U = 1{,}50\,\mathrm{V}$*? Náboj elektronu je* $e = 1{,}602 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{nC}$*, hmotnost elektronu* $m_\mathrm{e} = 9{,}11 \cdot 10^{-28}\,\mathrm{g}$ *a Planckova konstanta* $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$.

Karel přemýšlel o dualismu částic a bateriích.

Energie, kterou elektron získá urychlením díky napětí, je

$$E = eU\,.$$

Neuvažujeme odpor prostředí a všechna energie se tedy přemění na kinetickou energii

$$E = \frac{1}{2}m_\mathrm{e}v^2 = eU \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2eU}{m_\mathrm{e}}}\,,$$

kde v je rychlost, které elektron nabude. De Broglieho vlnovou délku λ částice pak můžeme vypočítat ze vztahu

$$\lambda = \frac{h}{m_\mathrm{e} v} = \frac{h}{m_\mathrm{e}\sqrt{\frac{2eU}{m_\mathrm{e}}}} = \frac{h}{\sqrt{2m_\mathrm{e}eU}} \doteq 1{,}00 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m} = 1{,}00\,\mathrm{nm}\,.$$

Vlnová délka elektronu bude 1,00 nm.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha DH ... lomivka

Optický prvek je složený z deseti rovnoběžných stejně širokých destiček o různých indexech lomu. Indexy lomu jsou dány posloupností $n_i = 1 + i/10$, kde $i = 1, \ldots, 10$ určuje, kolikátá je destička v pořadí. Celý prvek je umístěný ve vzduchu, o kterém předpokládejte, že má index lomu $n = 1$. Paprsek světla na prvek dopadá pod úhlem $\alpha = \pi/6$ měřeným od kolmice do 1. destičky. Pod jakým úhlem β v radiánech paprsek z prvku vystoupí (opět měřeným od kolmice)? Předpokládejte také, že paprsek jde celou dobu optickým prvkem, tedy že ten je dostatečně rozměrný, aby jej paprsek opustil až na rozhraní poslední destičky se vzduchem.

f(Aleš) zpytuje svědomí nad zápočtem z optiky.

Pro lom paprsku platí Snellův zákon

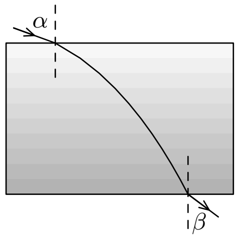
$$n_1 \sin\varphi_1 = n_2 \sin\varphi_2\,,$$

kde φ_j jsou úhly měřené od kolmice dopadu a n_j jsou indexy lomu příslušné prostředí, kde paprsek svírá úhel φ_j.

Dále víme, že paprsek v případě rovnoběžných desek vstupuje a vystupuje pod stejným úhlem. Platí tedy

$$n \sin\alpha = n_1 \sin\varphi_1 = \cdots = n_{10} \sin\varphi_{10} = n \sin\beta\,.$$

Odtud už je jasné, že úhel β je stejný jako úhel α, tedy $\pi/6$.



Obr. 6: Lom na planparalelních destičkách

Aleš Flandera
flandera.ales@fykos.cz

Úloha EA ... sledování rychlého rozpadu

Máme radioaktivní zlato 178, které má poločas rozpadu $\tau = 2{,}6\,\mathrm{s}$. Jaká část z celkového původního počtu jader zlata se rozpadne v druhé sekundě (čas mezi $t_1 = 1\,\mathrm{s}$ a $t_2 = 2\,\mathrm{s}$) od chvíle, kdy začneme měřit? Výsledek udejte na desetiny procent.

Karel přemýšlel o poločasu rozpadu svých myšlenek.

Počet nepřeměněných jader v závislosti na čase t je

$$N(t) = N_0 2^{\frac{-t}{\tau}}\,,$$

kde N_0 je počet radioaktivních jader v čase $t = 0$. Stačí tedy odečíst počet jader v čase t_1 od počtu jader v čase t_2 a podělit původním počtem jader N_0. Tím dostaneme část k, která se rozpadla ve druhé sekundě.

$$k = \frac{N(t_1) - N(t_2)}{N_0} = \frac{N_0 2^{\frac{-t_1}{\tau}} - N_0 2^{\frac{-t_2}{\tau}}}{N_0} = 2^{\frac{-t_1}{\tau}} - 2^{\frac{-t_2}{\tau}} \doteq 0{,}179 = 17{,}9\,\%$$

V druhé sekundě od začátku měření se tedy přemění 17,9 % z původního počtu jader.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha EB ... odraz od satelitu

Na satelitu na geostacionární dráze (tedy na takové dráze, na které se satelit pozorovatelům ze Země jeví jako nehybný) je umístěn koutový odražeč. Z místa na povrchu Země, které se nachází právě pod tímto satelitem, k němu vyšleme krátký světelný pulz. Za jak dlouho se pulz vrátí zpět, je-li rychlost světla $c = 3{,}0 \cdot 10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$? Pikoš si koupil satelitní anténu.

Na satelit působí gravitační síla Země. Aby se satelit pohyboval po kruhové dráze, musí tato síla být silou dostředivou, tedy musí platit

$$\frac{GM_\mathrm{Z} m}{r^2} = mr\omega^2\,,$$

kde G je gravitační konstanta, M_Z je hmotnost Země, m hmotnost satelitu, r poloměr oběžné dráhy a $\omega = 2\pi/T$ je úhlová rychlost, přičemž T je doba oběhu. Na geostacionární dráze je doba oběhu asi 23 hodin a 56 minut (přičemž uvažujeme-li 24 hodin, výsledek se změní jen málo).

Dráha, kterou světlo musí urazit, je $2(r - r_\mathrm{Z})$, kde r_Z je rovníkový poloměr Země. Je-li rychlost světla c, pak tuto dráhu světlo urazí za dobu

$$t = \frac{2(r - r_\mathrm{Z})}{c} = \frac{2}{c}\left(\sqrt[3]{\frac{GM_\mathrm{Z} T^2}{4\pi^2}} - r_\mathrm{Z}\right) \doteq 0{,}24\,\mathrm{s}\,.$$

Tomáš Pikálek
pikos@fykos.cz

Úloha EC ... akvárium

Mějme obdélníkové akvárium, na jehož stranu dopadá pod úhlem $\alpha = 68^\circ$ od kolmice světlo ze slunce. Toto světlo se zlomí a vyjde ven stěnou kolmou na stěnu, na kterou dopadlo. Spočítejte úhlovou šířku duhy, která se vytvoří, když znáte indexy lomu pro vlnovou délku 400 nm $n_1 = 1{,}344$ a pro 700 nm $n_2 = 1{,}331$. Janči má doma akvárko.

Uhol od kolmice prvýkrát zlomeného lúča označíme β, po druhom lome γ. Pre prvý lom máme Snellov zákon pre rozhranie vzduch-voda

$$\sin\alpha = n \sin\beta\,.$$

Uhol β je aj uhol medzi lúčom a rovinou skla pri druhom lome. Po prepočítaní na uhol od kolmice dostaneme

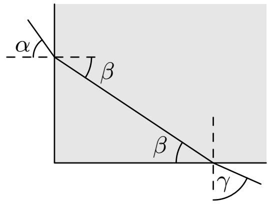
$$\sin\gamma = n\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = n\cos\beta\,.$$

Vyjadrením dostaneme

$$\sin\gamma = \sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}\,,$$

kde dosadíme oba indexy lomu a dostaneme

$$\Delta\gamma = \arcsin\sqrt{n_1^2 - \sin^2\alpha} - \arcsin\sqrt{n_2^2 - \sin^2\alpha} \doteq 3{,}9^\circ\,.$$



Obr. 7: Náčrtek lomu světla v akváriu

Ján Pulmann
`janci@fykos.cz`

Úloha ED ... ruské kuželky

Nezbedné dítě o hmotnosti m se zhoupne na houpačce z výšky h_0 měřené od nejnižšího bodu trajektorie tak, že v tomto místě srazí svého rodiče o hmotnosti $3m$ a dále pokračují v pohybu pohromadě. Do jaké výšky nyní společně vystoupají? Martina zaskočily neelastické srážky.

Bohužel přímočaré použití zákona zachování energie nevede ke správnému výsledku, protože ta se při neelastických srážkách nezachovává. Proto musíme nejprve vypočítat rychlost dítěte v_1 těsně před srážkou

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv_1^2\,,$$
$$v_1 = \sqrt{2gh_0}\,,$$

pak ze zákona zachování hybnosti určit rychlost v soustavy dítě + rodič těsně po srážce

$$mv_1 = (m + 3m)v\,,$$
$$v = \sqrt{2gh_0}/4$$

a konečně použít zákon zachování energie pro výpočet hledané výšky

$$4mgh = \frac{1}{2}4mv^2\,,$$

což po dosazení a spoustě krácení dá výsledek $h = h_0/16$.

Martin Formánek
`martin@fykos.cz`

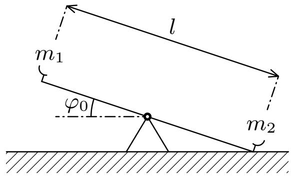
Úloha EE ... houpačka

Uvažujte houpačku, viz obrázek 8, jež má moment setrvačnosti okolo osy otáčení J. Houpačka je v zemi přichycena provázkem, který se protrhne při překonání síly F. Určete minimální dobu pádu houpačky, pokud můžete na obě sedátka umístit libovolné závaží. Uvažujte, že houpačka se může odchýlit o úhel maximálně φ_0 od vodorovné polohy. Pro úhel $\varphi < \varphi_0$ uvažujte, že $\cos\varphi \approx 1$. Lukáš zavzpomínal na dětské hřiště.

Houpačka se chová jako páka a proto, aby se přetrhl provázek, musí být hmotnost m_1 závaží na levém sedátku o $\Delta m = F/g$ větší než hmotnost m_2 závaží na sedátku pravém.

Vyjdeme z momentové věty, abychom určili úhlové zrychlení houpačky

$$\left(J + m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)\varepsilon = (m_1 - m_2)\frac{l}{2}g\cos\varphi_0\,,$$



Obr. 8: Houpačka

kde $\Delta m = m_1 - m_2$. Je vidět, že maximálního úhlového zrychlení dosáhneme pro $m_2 = 0$. Dále ze zadání víme, že můžeme zanedbat $\cos\varphi$ a zbude nám rovnice pro rovnoměrně zrychlený pohyb. Pro čas pádu můžeme psát

$$2\varphi_0 = \frac{1}{2}\varepsilon t^2 \quad\Rightarrow\quad t = 2\sqrt{\frac{\varphi}{\varepsilon}}\,.$$

Nyní dosadíme za ε a dostáváme

$$t = 2\sqrt{\frac{J + \frac{l^2}{4}\Delta m}{g\frac{l}{2}\Delta m}\varphi_0} = 2\sqrt{\frac{J + \frac{Fl^2}{4g}}{F\frac{l}{2}}\varphi_0}\,.$$

Lukáš Ledvina
`lukasl@fykos.cz`

Úloha EF ... neposedná či posedná destička

Deskový kondenzátor má elektrody s plochou $S = 100\,\mathrm{cm}^2$ vzdálené $d = 1\,\mathrm{cm}$. Vezmeme dielektrickou destičku o relativní permitivitě $\varepsilon_\mathrm{r} = 3$, tloušťce $b = 0{,}48\,\mathrm{cm}$ a ploše S a vložíme ji mezi desky kondenzátoru, který jsme předtím odpojili od zdroje. Jaký bude podíl kapacit před a po vložení destičky? Zmenší či zvětší se náboj na kondenzátoru a bude mít destička tendenci vyskakovat, nebo bude naopak vtažena? *Terka se nemohla dočkat konce přednášky.*

Kapacita deskového kondenzátoru o ploše elektrod S ve vzdálenosti d, mezi kterými je materiál o relativní permitivitě ε_r, je dána vztahem $C = \varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}S/d$. Když mezi elektrody rovnoběžně s nimi vsuneme destičku, která nezabírá celý prostor mezi nimi, ale má stejnou plochu, bude se soustava chovat jako dva sériově zapojené kondenzátory o kapacitách $C_{\varepsilon_0}(d-b)$ a $C_{\varepsilon_\mathrm{r}}(b)$. Pro novou kapacitu C_1 a poměr mezi původní a tou platí

$$\frac{1}{C_1} = \frac{b}{\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}S} + \frac{d-b}{\varepsilon_0 S} = \frac{b + \varepsilon_\mathrm{r}(d-b)}{\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}S}\,,$$
$$\frac{C_0}{C_1} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}\frac{\varepsilon_\mathrm{r}(d-b)+b}{\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0 S} = \frac{\varepsilon_\mathrm{r}(d-b)+b}{\varepsilon_\mathrm{r}d} \doteq 0{,}68\,.$$

Protože byly elektrody odpojeny od zdroje, náboj se změnit nemohl. Energie kondenzátoru je dána vztahem $E = Q^2/(2C)$. Jelikož kapacita kondenzátoru po vložení destičky vzrostla, jeho energie klesla. Systémy se obecně snaží takovýchto změn docílit, protože se pokouší dosáhnout energetického minima. Kondenzátor destičku rád přijme – bude vtažena.

Tereza Steinhartová
`terkas@fykos.cz`

Úloha EG ... optická lavice

Prokrastinující organizátorka si všimla již dlouho zahálející optické lavice ve skříni na experimenty a začala si hrát. Našla si čočku o ohniskové vzdálenosti $f_1 = 10\,\mathrm{cm}$ a pak ještě jednu, jejíž parametry neznala. Ve vzdálenosti $a = 20\,\mathrm{cm}$ nalevo od první čočky umístila předmět a druhou čočku posadila $d = 30\,\mathrm{cm}$ napravo od první. A ejhle, zjistila, že poloha obrazu se překrývá s polohou předmětu. Jaká je ohnisková vzdálenost f_2 druhé čočky? *Terka výjimečně uklízela.*

Zobrazovací rovnici pro tenkou čočku si napíšeme ve tvaru

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{x}\,,$$

kde vzdálenosti se měří od čočky, a je kladná je-li nalevo od ní, x je-li napravo od ní při daném uspořádání a ohnisková vzdálenost je kladná pro spojky a záporná pro rozptylky. Z těchto rovnic si sestavíme soustavu, kde uvažujeme, že předmět pro zobrazování druhou čočku od ní leží ve vzdálenosti $d - x$ a obraz leží dle zadání tam, kde předmět, tedy jeho vzdálenost bude se záporným znaménkem $d + a$

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{x}\,,$$
$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{d-x} - \frac{1}{a+d}\,.$$

Vyřešením soustavy rovnic dostáváme

$$f_2 = \frac{ad(d+a) - f_1(d+a)^2}{a^2} \doteq 12{,}5\,\mathrm{cm}\,.$$

Ohnisková vzdálenost druhé čočky je 12,5 cm.

Tereza Steinhartová
`terkas@fykos.cz`

Úloha EH ... ohřev mléka

Nádobu tvaru válce o výšce $h = 20\,\mathrm{cm}$ a poloměru $r = 5\,\mathrm{cm}$ naplníme při teplotě $t_1 = 20\,^{\circ}\mathrm{C}$ právě do poloviny vodou téže teploty, uzavřeme, ponoříme do vodní lázně o teplotě $t_2 = 80\,^{\circ}\mathrm{C}$ a počkáme. Jaký bude poté tlak na dně nádoby, je-li atmosferický tlak při plnění $p_\mathrm{a} = 101\,\mathrm{kPa}$, hustota vody při $20\,^{\circ}\mathrm{C}$ $\varrho_0 = 998{,}2\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a při $80\,^{\circ}\mathrm{C}$ $\varrho_1 = 971{,}8\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$? Vzduch považujte za ideální plyn. *Pikoš si ohříval mléko v láhvi.*

Hmotnost vody v nádobě se nezmění, proto je-li výška vodního sloupce po změně teploty h_1, platí

$$\frac{h}{2}\pi r^2 \varrho_0 = h_1 - \pi r^2 \varrho_1 \quad \Rightarrow \quad h_1 = \frac{h}{2}\frac{\varrho_0}{\varrho_1}\,.$$

Látkové množství vzduchu v nádobě se také nezmění, proto ze stavové rovnice platí

$$\frac{p_\mathrm{a}\pi r^2 \frac{h}{2}}{T_1} = \frac{p_1 \pi r^2 (h - h_1)}{T_2}\,,$$

kde p_1 je tlak plynu po změně teploty a $\{T_i\} = \{t_i\} + 273{,}15$.

Tlak na dně nádoby je součtem tlaku plynu nad vodní hladinou a hydrostatického tlaku, tedy

$$p = p_1 + h_1 \varrho_1 g = p_1 + \frac{h}{2}\varrho_0 g = p_\mathrm{a} \frac{T_2}{T_1} \frac{1}{2 - \frac{\varrho_0}{\varrho_1}} + \frac{h}{2}\varrho_0 g = 126{,}0\,\mathrm{kPa}\,.$$

Tomáš Pikálek
pikos@fykos.cz

Úloha FA ... Mariánský příkop vs. Mount Everest

Jak velký bude rozdíl mezi gravitačním zrychlením působícím na malé lehké hmotné těleso, které bude $h_1 = 8{,}85\,\mathrm{km}$ nad povrchem koule o poloměru $R_\mathrm{Z} = 6\,378\,\mathrm{km}$, a na druhé, též testovací, těleso, které je zakopáno ve stejné kouli v hloubce $h_2 = 11{,}0\,\mathrm{km}$? Na povrchu koule označme gravitační zrychlení $g = 9{,}80665\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. (Obvykle se takto značí tíhové zrychlení, ale rotaci nechceme uvažovat.) Kouli považujte za homogenní. Připomenutí – jako součást řešení chceme znát jak velikost rozdílu gravitačních zrychlení, tak informaci o tom, v kterém z těchto dvou míst je gravitační zrychlení větší. *Karel měl opět astromyšlenky.*

Nejprve určeme gravitační zrychlení nad povrchem koule, které označíme a_{g1}. Kouli jinak také můžeme říkat Země, aby nám nebyla tak cizí. Jak je dobře známo, tak gravitační pole koule ve vzdálenosti h_1 od jejího povrchu je stejné jako gravitační pole vytvářené hmotným bodem o stejné hmotnosti ve vzdálenosti $R_\mathrm{Z} + h_1$ od něj. Současně si vzpomeneme na to, že gravitační síla, a tedy i gravitační zrychlení, klesá nepřímo úměrně druhé mocnině vzdálenosti od hmotného bodu. Platí tedy

$$a_{g1} = g \frac{R_\mathrm{Z}^2}{(R_\mathrm{Z} + h_1)^2} \doteq 9{,}779\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Naopak v druhém případě gravitační zrychlení lineárně roste od nulové hodnoty ve středu koule po jeho maximální hodnotu na jeho povrchu. Dokázat se to dá buď přes Gaussův zákon, nebo složitěji integrováním (v obou případech zjistíme, že se kulová slupka, pod kterou se nacházíme, do gravitačního zrychlení neprojeví, protože se vyruší příspěvky z navzájem protilehlých stran koule). Gravitační zrychlení v hloubce h_2 pod povrchem Země pak můžeme psát jako

$$a_{g2} = g \frac{R_\mathrm{Z} - h_2}{R_\mathrm{Z}} \doteq 9{,}790\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Úlohou bylo určit rozdíl, proto odečteme zrychlení pod zemí od zrychlení nad zemí

$$\Delta a_g = a_{g2} - a_{g1} = g \left(\frac{R_\mathrm{Z} - h_2}{R_\mathrm{Z}} - \frac{R_\mathrm{Z}^2}{(R_\mathrm{Z} + h_1)^2} \right) \doteq 1{,}02 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Rozdíl gravitačních zrychlení je tedy $1{,}02 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ s tím, že větší gravitační zrychlení na těleso působí h_2 pod Zemí než h_1 nad Zemí.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha FB ... svíčková

Kulový balón je nadnášen hořícími svíčkami. Kolik jich musíme mít nejméně v koši, aby se balón vznesl? Každá svíčka váží $m = 30\,\mathrm{g}$ a zahřívá plyn v balónu výkonem $P = 1\,\mathrm{W}$, prázdný balón váží $M = 50\,\mathrm{kg}$. Koeficient tepelné vodivosti pláště balónu je $\lambda = 0{,}2\,\mathrm{W{\cdot}K^{-1}{\cdot}m^{-2}}$, jeho poloměr je $R = 10\,\mathrm{m}$. Hustota okolního vzduchu je $\varrho = 1{,}2\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a jeho teplota je $T = 293\,\mathrm{K}$. Předpokládejte, že teplota vzduchu v balónu je T_B a jeho hustota závisí na teplotě jako T_B^{-1}.

Lukáš přemýšlel nad balónovým létáním.

Máme zjistit, kdy se balón vznese, tj. kdy bude v rovnováze tíhová a vztlaková síla. Označíme N minimální počet svíček na palubě. Rovnováhu sil můžeme zapsat

$$(M + Nm)g = \frac{4}{3}\pi R^3 \left(\varrho - \varrho_\mathrm{B}\right) g\,,$$

kde ϱ_B je hustota vzduchu v balónu. Dále musí být teplota v balónu konstantní, to vede na podmínku

$$NP = 4\pi R^2 \lambda (T_\mathrm{B} - T)\,,$$

kde T_B je teplota vzduchu v balónu. Tu nám s hustotou spojuje rovnice ideálního plynu, což byla nápověda v zadání

$$\frac{T_\mathrm{B}}{T} = \frac{\varrho}{\varrho_\mathrm{B}}\,.$$

Tímto jsme sestavili soustavu tří rovnic pro neznámé ϱ_B, T_B a N, kterou nyní vyřešíme.

Z poslední rovnice dosadíme za T_B do prostřední a z této vyjádříme

$$\frac{\varrho}{\varrho_\mathrm{B}} = \frac{NP}{4\pi R^2\lambda T} + 1 = 1 + \alpha N \quad \Rightarrow \quad \varrho - \varrho_\mathrm{B} = \varrho\left(1 - \frac{\varrho_\mathrm{B}}{\varrho}\right) = \varrho\left(1 - \frac{1}{1+\alpha N}\right) = \varrho\frac{\alpha N}{1 + \alpha N}\,,$$

nyní $\varrho - \varrho_\mathrm{B}$ dosadíme do první rovnice, což je teď kvadratická rovnice. Označíme-li $\alpha = P/(4\pi R^2 \lambda T)$, dostáváme

$$\alpha m N^2 + N\left(m + \alpha M - \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho\alpha\right) + M = 0\,.$$

Tato rovnice může mít dva kladné nebo dva záporné kořeny, protože koeficient u konstantního členu je kladný. Toto plyne z Vietových vzorců. Proto kořen, který nás bude zajímat, je menší z nich

$$N = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \doteq 1351\,.$$

Výsledek jsme zaokrouhlili nahoru, aby se nám balón vznesl.

Lukáš Ledvina
`lukasl@fykos.cz`

Úloha FC ... spravedlivý pan Gauss

Náboj Q je umístěn ve výšce $d/2$ nad středem čtverce o hraně d. Jaký je tok elektrické intenzity čtvercem?

Terka si užívala se svým bičem systému „Rozděl a panuj“.

Použijeme trik, kterému se říká Gaussův zákon, familiérně někdy také krabičkový zákon. Představíme si, že náboj je uzavřen v krychli o hraně d a je umístěn v jejím středu. Celkový tok uzavřenou plochou, kterou je povrch krychle, bude Q/ε_0. Krychle má šest stěn a všechny stěny jsou rovnocenné, protože je náboj přímo ve středu krychle. Proto bude tok jednou stěnou přesně jednou šestinou celkového toku, což je $Q/(6\varepsilon_0)$.

Tereza Steinhartová
terkas@fykos.cz

Úloha FD ... kmit kmňak

Stojí před vámi úloha zjistit moment setrvačnosti I_n neznámého tělesa o hmotnosti $M = 900\,\mathrm{g}$ vzhledem k předem dané ose. K dispozici jste měli ocelovou strunu a testovací válec se stejnou hmotností a poloměrem $R = 10\,\mathrm{cm}$. Válec zavěšený na struně konal torzní kmity podél osy kolmé na podstavu s periodou $T_v = 12\,\mathrm{s}$. Neznámé těleso na stejné struně konalo torzní kmity s periodou $T_t = 15\,\mathrm{s}$. Určete moment setrvačnosti vzhledem k ose rovnoběžné s osou torzních kmitů. Vzájemná vzdálenost os je $R/2$.

f(Aleš) nostalgicky po praktikách dvě o praktikách jedna.

Perioda torzních kmitů je dána rovnicí

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}\,,$$

kde I je moment setrvačnosti a D je direkční moment vlákna. Právě ten z rovnice vyloučíme pomocí proměřeného tělesa se známým momentem setrvačnosti, tedy válce, jehož moment setrvačnosti je

$$I_\mathrm{v} = \frac{1}{2}MR^2\,.$$

Po vyloučení direkčního momentu dostaneme rovnici pro moment setrvačnosti neznámého tělesa vůči ose procházející těžištěm

$$I_\mathrm{t} = \frac{T_\mathrm{t}^2}{T_\mathrm{v}^2}I_\mathrm{v}\,.$$

Tento moment je ale vůči ose v těžišti, osa, kterou hledáme, je vzdálená o $R/2$. Přejdeme k ní pomocí Steinerovy věty

$$I_\mathrm{n} = I_\mathrm{t} + M\left(\frac{R}{2}\right)^2\,,$$

tedy náš hledaný moment bude dán jako

$$I_\mathrm{n} = \frac{1}{2}MR^2\frac{T_\mathrm{t}^2}{T_\mathrm{v}^2} + M\frac{R^2}{4}$$

a číselně dostaneme $I_\mathrm{n} = 9{,}28\,\mathrm{g{\cdot}m^2}$.

Aleš Flandera
flandera.ales@fykos.cz

Úloha FE ... kondíky

Dva kondenzátory o kapacitách $C_1 = 70\,\mathrm{nF}$ *a* $C_2 = 50\,\mathrm{nF}$ *jsme nabili na napětí* $U_1 = 5\,\mathrm{V}$ *a* $U_2 = 7\,\mathrm{V}$ *a spojili jsme desky se stejným znaménkem náboje. Kolik procent energie jsme tímto spojením ztratili?* *Jakub vybíjal kondenzátory.*

Po spojení kondenzátorov sa presunie obvodom náboj tak, aby bolo na kondenzátoroch rovnaké napätie. Náboje na kondenzátoroch sú $Q_1 = C_1U_1$ a $Q_2 = C_2U_2$. Z dosky s nábojom $+Q_1$ odíde náboj q a rovnaký náboj príde na dosku s nábojom $+Q_2$. Tak dostaneme podmienku pre napätia

$$\frac{Q_1 - q}{C_1} = U_1' = U_2' = \frac{Q_2 + q}{C_2} \,.$$

Z tejto rovnice dostaneme vzťah pre náboj q

$$q = \frac{Q_1C_2 - Q_2C_1}{C_1 + C_2} \,.$$

Energia kondenzátorov pred zapojením bola E_0 a po zapojení je E_1, kde

$$E_0 = \frac{1}{2}\left(C_1U_1^2 + C_2U_2^2\right) \quad \text{a} \quad E_1 = \frac{(Q_1 - q)^2}{2C_1} + \frac{(Q_2 + q)^2}{2C_2} \,.$$

Po dosadení vzorcov pre q, Q_1 a Q_2 dostaneme tvar

$$E_1 = \frac{(C_1U_1 + C_2U_2)^2}{2(C_1 + C_2)} \,.$$

Vyjadrime podiel stratenej energie ku počiatočnej a dosadíme

$$p = \frac{E_0 - E_1}{E_0} = \frac{C_1C_2\,(U_1 - U_2)^2}{(C_1 + C_2)\left(C_1U_1^2 + C_2U_2^2\right)} \,,$$

čo pre naše zadané hodnoty dáva $p \doteq 2{,}78\,\%$.

Jakub Kocák
`jakub@fykos.cz`

Úloha FF ... odporový koberec

Je dána nekonečná odporová síť tvořená n-úhelníky z odporového drátu s konstantním délkovým odporem. Každý menší n-úhelník spojuje středy stran toho předcházejícího. Jedna strana největšího n-úhelníku má odpor R_0*. Nyní spojíme všechny vrcholy tohoto největšího n-úhelníku a naměříme odpor mezi nimi a středem útvaru. Jaký bude tento odpor?* *Janči bádal.*

Z geometrie ľahko nahliadneme, že polomery susediacich n-uholníkov sa zmenšujú s koeficientom $\cos(\pi/n)$. V takomto pomere sa teda aj skracujú strany a zmenšuje sa odpor menších n-uholníkov.

Vieme, že celkový výkon je rovný $P = UI$, kde U je napätie medzi meranými bodmi a I je prúd tečúci obvodom. Zo symetrie je zrejmé, že do každého vrcholu pôjde rovnaký prúd, teda I/n, a ten sa rozdelí na dva smery. Táto úvaha platí pre každý n-uholník, teda každým kúskom drôtu tečie prúd $I/(2n)$. Výkon teda vieme spočítať aj ako výkon uvoľňujúci sa v celom obvode podľa vzťahu $P = \sum i^2 r$. Prúd je všade $i = I/(2n)$ a odpor sa zmenšuje. Budeme sčítavať po n-uholníkoch a odpor prvého je nR_0. Odpor ďalšieho je $\cos(\pi/n)$ násobkom toho predchádzajúceho, a tak ďalej.

Spolu je teda výkon

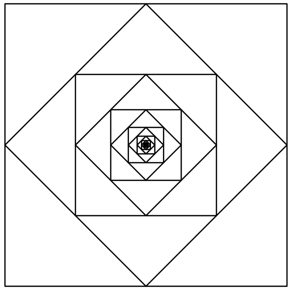
$$P = \sum_{k=0}^{\infty} i^2 n R_0 \cos^k(\pi/n) = \frac{I^2 n R_0}{4n^2(1-\cos(\pi/n))}\,.$$

Porovnaním s predchádzajúcim vzťahom pre výkon dostaneme

$$U = \frac{R_0}{4n(1-\cos(\pi/n))} I \ ,$$

odkiaľ odčítame jednoducho odpor celkového zapojenia

$$R = \frac{R_0}{4n(1-\cos(\pi/n))}\,.$$



Obr. 9: Náčrtek koberce pro $n = 4$

Ján Pulmann
`janci@fykos.cz`

Úloha FG ... potenciálně pokřivené vlny

Volná nerelativistická částice s kinetickou energií E a de Broglieho vlnovou délkou λ vletí do oblasti s odpudivým potenciálem V. Jaká bude nová vlnová délka této částice?

Martin přemýšlel o vlnách hmoty.

Jelikož celková energie částice se zachovává, musí platit $E = E' + V$, kde E' je nová kinetická energie částice. Tedy

$$E' = E - V = \frac{1}{2} m v'^2\,,$$

přičemž m je hmotnost částice a v' její nová rychlost, kterou vyjádříme jako

$$v' = \sqrt{\frac{2(E-V)}{m}},$$

a dosadíme do známého vztahu pro de Broglieho vlnovou délku

$$\lambda' = \frac{h}{mv'} = \frac{h}{m\sqrt{\frac{2(E-V)}{m}}}\,.$$

Z jmenovatele tohoto výrazu vytkneme E a identifikujeme původní rychlost $v = \sqrt{2E/m}$

$$\lambda' = \frac{h}{m\sqrt{\frac{2E}{m}(1-V/E)}} = \frac{h}{mv\sqrt{(1-V/E)}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-V/E}}\,,$$

což je hledaný výraz.

Martin Formánek
`martin@fykos.cz`

FYKOS
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://fykos.cz`
e-mail: `fykos@fykos.cz`

FYKOS je také na Facebooku
http://www.facebook.com/Fykos

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.